

Элементы высшей математики

Производные высших порядков

ВЫПОЛНИТЬ ПОДРОБНЫЙ КОНСПЕКТ С ПОНИМАНИЕМ
МАТЕРИАЛА И РЕШИТЬ ПРЕДЛОЖЕННЫЕ В ТЕКСТЕ ЗАДАНИЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНО КО 2 НОЯБРЯ

На данном уроке мы научимся находить производные высших порядков, а также записывать общую формулу «энной» производной. Кроме того, будет рассмотрена формула Лейбница $(u \cdot v)^{(n)}$ таковой производной и производные высших порядков от неявно заданной функции.

Предлагаю сразу же пройти мини-тест:

Вот функция: $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ и вот её первая производная:
 $y' = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)' = 3x^2 + 4x + 3$

Нетрудно даже догадаться, что вторая производная – это производная от 1-й производной:

$$y'' = (y')' = (3x^2 + 4x + 3)' = 6x + 4$$

В принципе, вторую производную уже считают производной высшего порядка.

Аналогично: третья производная – это производная от 2-й производной:

$$y''' = (y'')' = (6x + 4)' = 6$$

Четвёртая производная – есть производная от 3-й производной:

$$y^{IV} = (y''')' = (6)' = 0$$

Пятая производная: $y^V = (y^{IV})' = (0)' = 0$, и очевидно, что все производные более высоких порядков тоже будут равны нулю:

$$y^{VI} = y^{VII} = y^{VIII} = y^X = \dots = 0$$

Помимо римской нумерации на практике часто используют следующие обозначения:

$y^{(4)}, y^{(5)}, y^{(6)}, y^{(7)}, y^{(8)}, y^{(9)}, y^{(10)}, \dots$, производную же «энного» порядка обозначают через $y^{(n)}$. При этом надстрочный индекс нужно обязательно заключать в скобки – чтобы отличать производную от «игрека» в степени.

Иногда встречается такая запись: $\frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \frac{d^5 y}{dx^5}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}, \dots$ – третья, четвёртая, пятая, ..., «энная» производные соответственно.

Пример 1

Дана функция $y = e^{3x}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение:

$$y' = (e^{3x})' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$

$$y'' = (y')' = (3e^{3x})' = 3(e^{3x})' = 3e^{3x} \cdot 3 = 3^2 e^{3x}$$

$$y''' = (y'')' = (3^2 e^{3x})' = 3^2 e^{3x} \cdot 3 = 3^3 e^{3x}$$

Четыре штриха ставить уже не принято, поэтому переходим на числовые индексы:

$$y^{(4)} = (y''')' = (3^3 e^{3x})' = 3^3 e^{3x} \cdot 3 = 3^4 e^{3x}$$

Ответ: $y^{(4)} = 3^4 e^{3x}$

Хорошо, а теперь задумаемся над таким вопросом: что делать, если по условию требуется найти не 4-ю, а например, 20-ю производную? Если для производной 3-4-5-го (максимум, 6-7-го) порядка решение оформляется достаточно быстро, то до производных более высоких порядков мы «доберёмся» ой как не скоро. Не записывать же, в самом деле, 20 строк! В подобной ситуации нужно **проанализировать несколько найденных производных, увидеть закономерность и составить формулу «энной» производной**. Так, в Примере №1 легко понять, что при каждом следующем дифференцировании перед экспонентой будет «выскакивать» дополнительная «тройка», причём на любом шаге степень «тройки» равна номеру производной, следовательно:

$$y^{(n)} = 3^n e^{3x}, \text{ где } n - \text{произвольное натуральное число.}$$

И действительно, если $n = 1$, то получается в точности 1-я производная: $y' = 3^1 e^{3x} = 3e^{3x}$, если $n = 2$ – то 2-я: $y'' = 3^2 e^{3x}$ и т.д. Таким образом, двадцатая производная определяется мгновенно: $y^{(20)} = 3^{20} e^{3x}$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 2

Найти $y^{(5)}$ функции $y = 5^x$. Записать производную n -го порядка

Пример 3

Найти $y^{(10)}$ для функции $y = \ln(2x - 1)$.

Решение: чтобы прояснить ситуацию найдём несколько производных:

$$y' = (\ln(2x - 1))' = \frac{1}{2x - 1} \cdot (2x - 1)' = \frac{1 \cdot 2}{2x - 1}$$

Полученные числа перемножать не спешим!

$$y'' = \left(\frac{1 \cdot 2}{2x-1} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot ((2x-1)^{-1})' = -1 \cdot 2 \cdot (2x-1)^{-2} \cdot (2x-1)' = -\frac{1 \cdot 2}{(2x-1)^2} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2^2}{(2x-1)^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1 \cdot 2^2}{(2x-1)^2} \right)' = -1 \cdot 2^2 \cdot ((2x-1)^{-2})' = -1 \cdot 2^2 \cdot (-2) \cdot (2x-1)^{-3} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x-1)^3}$$

$$y^{(4)} = \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{(2x-1)^3} \right)' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot ((2x-1)^{-3})' = 1 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot (2x-1)^{-4} \cdot 2 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x-1)^4}$$

$$y^{(5)} = \left(-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4}{(2x-1)^4} \right)' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot ((2x-1)^{-4})' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot (-4) \cdot (2x-1)^{-5} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^5}{(2x-1)^5}$$

На следующем шаге лучше всего составить формулу «энной» производной (*коль скоро, условие этого не требует, то можно обойтись черновиком*). Для этого смотрим на полученные результаты и выявляем закономерности, с которыми получается каждая следующая производная.

Во-первых, они знакопереваются. Знакопереживание обеспечивает **«мигалка»**, и поскольку 1-я производная положительна, то в общую формулу войдёт следующий множитель: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \dots$

Во-вторых, в числителе «накручивается» **факториал**, причём он «отстаёт» от номера производной на одну единицу: $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \dots$

И в-третьих, в числителе растёт степень «двойки», которая равна номеру производной. То же самое можно сказать о степени знаменателя. Окончательно:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 2^n}{(2x-1)^n}$$

В целях проверки подставим парочку значений «эн», например, $n = 4$ и $n = 5$:

$$n = 4 \Rightarrow y^{(4)} = \frac{(-1)^5 \cdot 3! \cdot 2^4}{(2x-1)^4} = -\frac{3! \cdot 2^4}{(2x-1)^4};$$

$$n = 5 \Rightarrow y^{(5)} = \frac{(-1)^6 \cdot 4! \cdot 2^5}{(2x-1)^5} = \frac{4! \cdot 2^5}{(2x-1)^5}.$$

При

$$n = 10 \Rightarrow y^{(10)} = \frac{(-1)^{11} \cdot 9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

$$y^{(10)} = -\frac{9! \cdot 2^{10}}{(2x-1)^{10}}$$

Ответ:

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 4

Найти $y^{(20)}$ функции $y = \frac{1}{x-2}$.

Пример 5

Найти $y^{(8)}$ функции $y = \sqrt{x-2}$.

Ещё раз повторим порядок действий:

- 1) Сначала находим несколько производных. Чтобы уловить закономерности обычно хватает трёх-четырёх.
- 2) Затем настоятельно рекомендую составить (*хотя бы на черновике*) «энную» производную – она гарантированно уберёжёт от ошибок.

3) На заключительном этапе выполняем проверку «энной» производной – берём пару значений «эн» (лучше соседних) и выполняем подстановку. А ещё надёжнее – проверить все найденные ранее производные. После чего подставляем в $y^{(n)}$ нужное значение, например, $n = 20$ или $n = 8$ и аккуратно подсчитываем результат.

Пример 6

Записать формулу производной n -го порядка для функции $y = \ln(4 - x^2)$

Решение: дифференцировать предложенную функцию совсем не хочется, поскольку получится «плохая» дробь, которая сильно затруднит нахождение последующих производных.

В этой связи целесообразно выполнить предварительные преобразования: используем формулу разности квадратов и свойство логарифма $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

$$y = \ln(4 - x^2) = \ln((2 - x)(2 + x)) = \ln(2 - x) + \ln(2 + x)$$

Примечание: в данном случае это свойство срабатывает для всех «икс» из области определения функции, и поэтому мы получаем равносильное преобразование.

Совсем другое дело:

$$y' = (\ln(2 - x) + \ln(2 + x))' = -\frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x}$$

И последующие производные:

$$y'' = \left(-\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right)' = -\left(-\frac{1}{(2-x)^2} \right) \cdot (-1) - \frac{1}{(2+x)^2} = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2}$$

$$y''' = \left(-\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} \right)' = -\frac{1 \cdot (-2)}{(2-x)^3} \cdot (-1) - \frac{-1 \cdot 2}{(2+x)^3} = -\frac{1 \cdot 2}{(2-x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{(2+x)^3}$$

$$y^{(4)} = \left(-\frac{1 \cdot 2}{(2-x)^3} + \frac{1 \cdot 2}{(2+x)^3} \right)' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot (-3)}{(2-x)^4} \cdot (-1) + \frac{1 \cdot 2 \cdot (-3)}{(2+x)^4} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2-x)^4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2+x)^4}$$

Думаю, всё просматривается. Обратите внимание, что 2-я дробь знакопереключается, а 1-я – нет. Конструируем производную n -го порядка:

$$y^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(2-x)^n} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(2+x)^n}$$

Контроль:

$$n = 3 \Rightarrow y''' = -\frac{2!}{(2-x)^3} + \frac{2!}{(2+x)^3};$$

$$n = 4 \Rightarrow y^{(4)} = -\frac{3!}{(2-x)^4} - \frac{3!}{(2+x)^4}$$

вынесем факториал за скобки:

$$y^{(n)} = (n-1)! \cdot \left[\frac{(-1)^{n+1}}{(2+x)^n} - \frac{1}{(2-x)^n} \right]$$

Ответ:

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 7

Записать формулу производной n -го порядка для функции $y = \frac{4x+7}{2x+3}$

Пример 8

Дана функция $y = \sin x$. Найти $y^{(18)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Восемнадцатая производная в точке $x = \frac{\pi}{2}$. Всего-то.

Решение: сначала, очевидно, нужно найти $y^{(18)}$. Поехали:

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$$

С синуса начинали, к синусу и пришли. Понятно, что при дальнейшем дифференцировании этот цикл будет продолжаться до бесконечности, и возникает следующий вопрос: как лучше «добраться» до восемнадцатой производной?

Способ «любительский»: быстренько записываем справа в столбик номера последующих производных:

$y' = (\sin x)' = \cos x$	5	9	13	17
$y'' = (\cos x)' = -\sin x$	6	10	14	18
$y''' = (-\sin x)' = -\cos x$	7	11	15	
$y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$	8	12	16	

Таким образом: $y^{(18)} = -\sin x$

Но это работает, если порядок производной не слишком велик. Если же надо найти, скажем, сотую производную, то следует воспользоваться [делимостью на 4](#). Сто делится на 4 без остатка, и легко видеть, что таковые числа

располагаются в нижней строке, поэтому: $y^{(100)} = \sin x$.

Кстати, 18-ю производную тоже можно определить из аналогичных соображений:

во второй строке находятся числа, которые делятся на 4 с остатком 2.

Другой, более академичный метод основан на [периодичности синуса](#) и [формулах приведения](#). Пользуемся готовой формулой «энной»

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n \cdot \pi}{2}\right)$$

производной синуса подставляется нужный номер. Например:

$$y' = (\sin x)' = \sin\left(x + \frac{1 \cdot \pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad (\text{формула}$$

[приведения](#) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$);

$$y''' = (\sin x)''' = \sin\left(x + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) = -\cos x \quad (\text{формула приведения} \quad \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos \alpha)$$

В нашем случае:

$$y^{(18)} = (\sin x)^{(18)} = \sin\left(x + \frac{18 \cdot \pi}{2}\right) = \sin(x + 9\pi) \stackrel{(1)}{=} \sin(x + \pi) \stackrel{(2)}{=} -\sin x$$

(1) Поскольку синус – это периодическая функция с периодом 2π , то у аргумента можно безболезненно «открутить» 4 периода (т.е. 8π).

(2) Пользуемся [формулой приведения](#) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.

С сотней, к слову, вообще всё элементарно – 25 «оборотов»

$$y^{(100)} = (\sin x)^{(100)} = \sin\left(x + \frac{100 \cdot \pi}{2}\right) = \sin(x + 50\pi) = \sin x$$

прочь:

Заключительная, более лёгкая часть задания – это нахождение восемнадцатой производной в точке:

$$y^{(18)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

Ответ: $y^{(18)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 9

Дана функция $y = \cos x$.

Найти $y^{(47)}(\pi)$.

Кроме того, ориентируясь по [таблице формул приведения](#), постарайтесь самостоятельно получить общую формулу «энной» производной косинуса.

На практике при аргументе синуса либо косинуса часто встречается числовой множитель, например: $y = \cos 2x$. Как находить производные высших порядков в этом случае? Всё будет точно так же (*периодичность, формулу приведения*), но при каждом дифференцировании перед функцией будет дополнительно «выпрыгивать» «двойка»

производные высших порядков от произведения функций $(uv)^{(n)}$

Материал разберём на конкретной задаче:

Пример 10

Найти y''' функции $y = e^{-x} \cos x$

Решение начнём с ключевого вопроса: как выгоднее всего найти третью производную от произведения функций?

...А почему бы, собственно, не взять три производные подряд? Тем более это представляется вполне подъёмной задачей. Используем [правило](#)

[дифференцирования произведения](#) $(uv)' = u'v + uv'$ и упрощаем результат:

$$y' = (e^{-x} \cos x)' = (e^{-x})' \cos x + e^{-x} (\cos x)' = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x) = e^{-x} (-\cos x - \sin x)$$

Со второй производной дела обстоят похуже, но всё-таки ещё не так плохо:

$$\begin{aligned} y'' &= (e^{-x} (-\cos x - \sin x))' = (e^{-x})' (-\cos x - \sin x) + e^{-x} (-\cos x - \sin x)' = \\ &= -e^{-x} (-\cos x - \sin x) + e^{-x} (\sin x - \cos x) = e^{-x} (\cos x + \sin x + \sin x - \cos x) = 2e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

С третьей немножко повезло:

$$y''' = 2(e^{-x} \sin x)' = 2((e^{-x})' \sin x + e^{-x} (\sin x)') = 2(-e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x) = 2e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

Всё выглядит весьма благонадёжно, но...

В чём недостаток такого решения? Во-первых, оно длинное. А ведь предложенная функция даже без «наворотов». И, во-вторых, тут легко запутаться (*особенно в знаках*). Рассмотрим простой и чёткий способ решения подобных заданий:

Формула Лейбница

Пожалуйста, не путайте с более известной [формулой Ньютона-Лейбница!](#)

Производную $n - \Gamma \circ$ порядка от произведения двух функций можно найти по формуле:

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + C_n^3 u^{(n-3)} v''' + \dots + C_n^{n-2} u'' v^{(n-2)} + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)}$$

В частности:

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

$$(uv)^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v' + 10u'''v'' + 10u''v''' + 5u'v^{(4)} + uv^{(5)}$$

$$(uv)^{(6)} = u^{(6)}v + 6u^{(5)}v' + 15u^{(4)}v'' + 20u'''v''' + 15u''v^{(4)} + 6u'v^{(5)} + uv^{(6)}$$

Примечание: здесь и далее предполагается дифференцируемость функций нужное количество раз

Специально запоминать ничего не надо, ибо, чем больше формул знаешь – тем меньше понимаешь. Гораздо полезнее ознакомиться с [биномом Ньютона](#), поскольку формула Лейбница очень и очень на него похожа.

Найдём третью производную функции $y = e^{-x} \cos x$. Используем формулу Лейбница:

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

В данном случае: $u = e^{-x}$, $v = \cos x$. Производные легко решить устно:

$u' = -e^{-x}$	$v' = -\sin x$
$u'' = e^{-x}$	$v'' = -\cos x$
$u''' = -e^{-x}$	$v''' = \sin x$

Теперь аккуратно и ВНИМАТЕЛЬНО выполняем подстановку и упрощаем результат:

$$\begin{aligned} y''' &= (e^{-x} \cos x)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' = \\ &= -e^{-x} \cos x + 3e^{-x}(-\sin x) - 3e^{-x}(-\cos x) + e^{-x} \sin x = \\ &= e^{-x}(-\cos x - 3\sin x + 3\cos x + \sin x) = e^{-x}(2\cos x - 2\sin x) = 2e^{-x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Ответ: $y''' = 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 11

Найти y''' функции $y = \frac{\sin 2x}{x}$

Пример 12

Найти производную указанного порядка

$$y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1), \quad y^{(4)}$$

Решение: первое и существенное замечание – решать [вот так](#), наверное, не нужно =) =)

Запишем функции u, v и найдём их производные до 5-го порядка включительно. Предполагаю, что производные правого столбца стали для вас устными:

$u = 2x^2 - 7$	$v = \ln(x-1)$
$u' = 4x$	$v' = \frac{1}{x-1}$
$u'' = 4$	$v'' = -\frac{1}{(x-1)^2}$
$u''' = 0$	$v''' = \frac{2}{(x-1)^3}$
$u^{(4)} = 0$	$v^{(4)} = -\frac{6}{(x-1)^4}$
$u^{(5)} = 0$	$v^{(5)} = \frac{24}{(x-1)^5}$

В левом же столбце «живые» производные быстро «закончились» и это очень хорошо – в формуле Лейбница обнулятся три слагаемых:

$$y^{(5)} = (uv)^{(5)} = ((2x^2 - 7)\ln(x-1))^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v' + 10u'''v'' + 10u''v''' + 5u'v^{(4)} + uv^{(5)} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 10 \cdot 4 \cdot \frac{2}{(x-1)^3} + 5 \cdot 4x \cdot \left(-\frac{6}{(x-1)^4}\right) + (2x^2 - 7) \cdot \frac{24}{(x-1)^5} = (*)$$

Вновь остановлюсь на дилемме, которая фигурировала в статье о [сложных производных](#): упрощать ли результат? В принципе, можно оставить и так – преподавателю будет даже легче проверять. Но он может потребовать довести решение до ума. С другой стороны, упрощение по собственной инициативе чревато алгебраическими ошибками.

$$(*) = 8 \cdot \left[\frac{10}{(x-1)^3} - \frac{15x}{(x-1)^4} + \frac{3(2x^2 - 7)}{(x-1)^5} \right] = 8 \cdot \frac{10(x-1)^2 - 15x(x-1) + 3(2x^2 - 7)}{(x-1)^5} =$$

$$= 8 \cdot \frac{10x^2 - 20x + 10 - 15x^2 + 15x + 6x^2 - 21}{(x-1)^5} = \frac{8(x^2 - 5x - 11)}{(x-1)^5}$$

Отлично, всё сошлось.

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Пример 13

Для функции $y = e^{3x}(2x-1)$:

- найти $y^{(n)}$ непосредственным дифференцированием;
- найти $y^{(n)}$ по формуле Лейбница;
- вычислить $y^{(n)}(0)$.

Чтобы поднять заключительный параграф нужно уметь [дифференцировать неявные функции](#):

Производные высших порядков от функций, заданных неявно

Пример 14

Дано уравнение $y^2 = x$. Найти y''' .

Решение: первый шаг хорошо знаком:

$$(y^2)' = (x)'$$

$$2yy' = 1$$

$$y' = \frac{1}{2y}$$

То, что функция и её производная выражены неявно сути дела не меняет, вторая производная – это производная от 1-й производной:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2y} \right)' = \frac{1}{2} (y^{-1})' = -\frac{1}{2} y^{-2} y' = -\frac{y'}{2y^2}$$

Однако свои правила игры существуют: производные 2-го и более высоких порядков принято выражать **только через «икс» и «игрек»**. Поэтому в

полученную 2-ю производную подставим $y' = \frac{1}{2y}$:

$$y'' = -\frac{y'}{2y^2} = -\frac{\frac{1}{2y}}{2y^2} = -\frac{1}{4y^3}$$

Третья производная – есть производная от 2-й производной:

$$y''' = (y'')' = \left(-\frac{1}{4y^3} \right)' = -\frac{1}{4} (y^{-3})' = -\frac{1}{4} \cdot (-3)y^{-4} y' = \frac{3y'}{4y^4}$$

Аналогично, подставим $y' = \frac{1}{2y}$:

$$y''' = \frac{3y'}{4y^4} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2y}}{4y^4} = \frac{3}{8y^5}$$

$$\text{Ответ: } y''' = \frac{3}{8y^5}$$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Пример 15

Дано уравнение $x^2 - y^2 = 1$. Найти y''' .

Пример 16

Найти y''

$$2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$$

Эллипс

Решение: найдём 1-ю производную:

$$(2x^2 + 3y^2 - 6)' = (0)'$$

$$2 \cdot 2x + 3 \cdot 2yy' - 0 = 0$$

$$2x + 3yy' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{3y}$$

Берём уравнение $2x + 3yy' = 0$ и используем тот же самый приём, что и при нахождении 1-й производной – «навешиваем» штрихи на обе части:

$$(2x + 3yy')' = (0)'$$

$$2 + 3((y')'y' + y(y')') = 0$$

$$2 + 3(y' \cdot y' + yy'') = 0$$

$$2 + 3(y')^2 + 3yy'' = 0$$

Вторая производная должна быть выражена только через x и y , поэтому сейчас (*именно сейчас*) удобно избавиться от 1-й производной. Для этого в

полученное уравнение подставим $y' = -\frac{2x}{3y}$:

$$2 + 3 \cdot \left(-\frac{2x}{3y}\right)^2 + 3yy'' = 0$$

$$2 + 3 \cdot \frac{4x^2}{9y^2} + 3yy'' = 0$$

$$2 + \frac{4x^2}{3y^2} + 3yy'' = 0$$

Чтобы избежать лишних технических трудностей, умножим обе части на $3y^2$:

$$3y^2 \cdot \left(2 + \frac{4x^2}{3y^2} + 3yy''\right) = 3y^2 \cdot 0$$

$$6y^2 + 4x^2 + 9y^3y'' = 0$$

И только на завершающем этапе оформляем дробь:

$$9y^3y'' = -(4x^2 + 6y^2)$$

$$y'' = -\frac{4x^2 + 6y^2}{9y^3}$$

Теперь смотрим на исходное уравнение $2x^2 + 3y^2 = 6$ и замечаем, что полученный результат поддаётся упрощению:

$$y'' = -\frac{4x^2 + 6y^2}{9y^3} = -\frac{2(2x^2 + 3y^2)}{9y^3} = -\frac{2 \cdot 6}{9y^3} = -\frac{4}{3y^3}$$

$$y'' = -\frac{4}{3y^3}$$

Ответ:

Дополнительные примеры повышенной технической сложности можно найти в [ИД3-6.2 задачника Рябушко](#).

Позабытыми остались и производные высших порядков от параметрически заданных функций, которые практически не встречаются.