

Лекция: Определенный интеграл и его свойства

Задание студентам:

Внимательно изучите теоретический материал по теме, сделайте конспект в тетради по математике

Теоретический материал

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке, а числа a и b принадлежат в этом промежутке.

Определение

Приращение первообразной функции $F(x)$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определённым интегралом от a до b функции $f(x)$* и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Свойства определённого интеграла:

$$1. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx; \quad k - \text{число};$$

$$2. \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$4. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b;$$

$$5. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Например:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (x^2 + 7x - 2)dx &= \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 7x dx - 2 \int_1^3 dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{27}{3} + \frac{7 \cdot 9}{2} - 2 \cdot 3 \right) - \\ &\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 2 \right) = 34,5 - \frac{1}{3} - 3,5 + 2 = 33 - \frac{1}{3} = 32\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Выполнить задание по образцу (решить определённые интегралы).

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x};$$

$$2. \int_0^{\pi} (2e^{2x} + 3\cos x)dx;$$

$$3. \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 7)dx;$$

Нахождение определённого интеграла методом подстановки и по частям.

Метод подстановки

1 способ

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \left| \begin{array}{l} 8-x=t \\ -dx=dt \\ dx=-dt \\ x=0 \quad t=8 \\ x=7 \quad t=1 \end{array} \right| = \int_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int_8^1 t^{-\frac{1}{3}} dt = \int_8^1 t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_1^8 = \frac{3\sqrt[3]{t^2}}{2} \Big|_1^8 = \frac{3\sqrt[3]{8^2}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{1^2}}{2} =$$

$$\frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3}{2} = 4,5.$$

2 способ

$$\int_1^e \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right| = \int_1^e t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_1^e = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Метод интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 =$$

$$\left(\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 \right) - \left(\frac{0}{2} e^0 - \frac{1}{4} e^0 \right) = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}.$$