Лекция: Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки и методом интегрирования по частям

Задание студентам:

Внимательно изучите теоретический материал по теме, сделайте конспект в тетради по математике

Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки и методом интегрирования по частям

$$\int \left(2x^3+1\right)^4 x^2dx = \left| \begin{matrix} t = 2x^3+1 \\ dt = 6x^2dx \\ x^2dx = \dfrac{dt}{6} \end{matrix} \right| = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}+c .$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^3} = \left| \begin{matrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{4t^2}+c = -\frac{1}{4\left(x^2+1\right)^2}+c$$

.

$$\int \sqrt{5x^3+1}\cdot x^2dx = \left| \begin{matrix} 5x^3+1 = t \\ 15x^2dx = dt \\ x^2dx = \dfrac{dt}{15} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{15} = \frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{15}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}}+c = \frac{2}{45}\sqrt{\left(5x^3+1\right)^3}+c$$

.

$$\int 5^{3x+7}dx = \left| \begin{matrix} 3x+7 = t \\ 3dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{matrix} \right| = \int 5^t\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int 5^t dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+c = \frac{5^{3x+7}}{3\ln 5}+c .$$

Интегрирование по частям

Интегрирование по частям сводится к использованию равенства

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu .$$

Есть несколько типов интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. $\int P(x)e^{kx}dx$; $\int P(x)\sin kxdx$; $\int P(x)\cos kxdx$.

$P(x)$ - многочлен; k - число.

$u = P(x)$

$dv = e^{kx}dx$; $dv = \sin kxdx$; $dv = \cos kxdx$.

2. $\int P(x)\arccos x dx$; $\int P(x)\arcsin x dx$;

$\int P(x) arctgx\, dx$; $\int P(x) arc\; ctgx\, dx$; $\int P(x)\ln x\, dx$.

$u = arc\cos x$; $u = arc\sin x$; $u = arc\,tgx$;

$u = arc\,ctgx$; $u = \ln x$.

$dv = P(x)dx$.

3. $\int e^{ax}\cos bx\, dx$; $\int e^{ax}\sin bx\, dx$; a, b - числа;

$u = \cos bx$; $u = \sin bx$;

$dv = e^{ax}dx$.

Например:

1.

$$\int (x+1)\sin 3x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x+1 \\ du = dx \\ v = \int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| = (x+1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int -\frac{1}{3}\cos 3x\, dx =$$

$$-\frac{(x+1)}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{(x+1)}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + c$$

.

2.

$$\int (x+3) arc\,tgx\, dx = \left| \begin{array}{c} u = arc\,tgx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = \int (x+3)dx = \dfrac{x^2}{2} + 3x \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\cdot arctgx - \int \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} - 3\int \frac{xdx}{x^2+1} = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx - 3\int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$\left| \begin{array}{c} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) arctgx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - 3\cdot\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right) arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} arctgx - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$$

3.

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x \\ du = e^x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} e^x = u \\ e^x dx = du \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$e^x \sin x + e^x \cos x + \int -\cos x e^x dx.$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c.$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c.$$

Самостоятельная работа
(Выполнить к 10 апреля)

Вычислить неопределённый интеграл методом подстановки

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2. $\int e^{2x+1} dx$; 3. $\int (x^2+5)^7 2xdx$;

4. $\int x\sqrt{1+x^2} dx$; 5. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 6. $\int e^{x+x^2} (1+2x) dx$;

7. $\int \cos^5 4x \sin 4x dx$; 8. $\int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}}$; 9. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

10. $\int e^{x^3+x^2-x+1} (3x^2+2x-1) dx$; 11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

12. $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x} dx$; 13. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}$; 14. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x^2}$;

15. $\int 2^{x^3} x^2 dx$; 16. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; 17. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$;

18. $\int \cos(x+3) dx$; 19. $\int \sin^3 x \cos x dx$; 20. $\int \sqrt[3]{2x-3} dx$;

21. $\int e^{x^3+7x^2} (3x^2+14x) dx$; 22. $\int \frac{(2x+e^x) dx}{\sqrt{x^2+e^x}}$.

Вычислить неопределённый интеграл методом интегрирования по частям.

1. $\int \arcsin x dx$; 2. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$; 3. $\int x \cos x dx$;

4. $\int e^x \sin x$; 5. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 6. $\int (x-1) \sin x dx$;

7. $\int \ln^2 x dx$; 8. $\int (2x-5) e^{-3x} dx$; 9. $\int (2x-3) \sin \frac{x}{2} dx$;

10. $\int \sqrt{x}\ln x dx$;
11. $\int \frac{\ln x dx}{(1+x)^2}$;
12. $\int xe^{-2x}dx$;
13. $\int x\cos 2x dx$;
14. $\int arc\,ctg 3x\, dx$;
15. $\int x^2 \ln x dx$;
16. $\int x\sin 2x dx$;
17. $\int (2x-3)e^{3x}dx$;
18. $\int (3x^2+2x-5)\ln|x|dx$;
19. $\int x\, arctgx\, dx$;
20. $\int x^3 e^x dx$.