ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Лекция 1

Задачи, приводящие к понятию первообразной

Пусть при движении частицы вдоль оси $0x$ зависимость x-координаты от времени t описывается уравнением

$$x(t) = 3 + 4t + 5\,t^2, \qquad (1)$$

согласно которому в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке с координатой $x_0 = x(0) = 3$.

Скорость движения частицы равна производной от координаты по времени и, следовательно,

$$v(t) = x'(t) = 4 + 10t. \qquad (2)$$

Полагая $t = 0$, находим начальную скорость движения частицы:

$$v_0 = v(0) = 4 \qquad (3)$$

Дифференцируя по времени скорость движения частицы, получаем ее ускорение:

$$a = v'(t) = 10. \qquad (4)$$

Таким образом, уравнение (1) позволяет найти все характеристики движения частицы.

Рассмотрим теперь обратную задачу, когда по заданной зависимости скорости движения частицы от времени нужно определить положение частицы в произвольный момент времени. Заметим, что уравнение (2) не содержит информации о положении частицы в начальный момент времени. Такие сведения оказались утерянными в результате дифференцирования уравнения движения (1). Следовательно, для однозначного решения обратной задачи, а именно – восстановления функции $x(t)$ по известной ее производной $v(t)$ – необходимо дополнительно задать начальное условие $x(0) = 3$. В противном случае общее решение такой задачи должно содержать неопределенную постоянную величину:

$$x(t) = C + 4t + 5\,t^2 \qquad (5)$$

Аналогично, для нахождения закона изменения скорости движения частицы по известному ускорению требуется задание начального условия (3). При отсутствии такого условия скорость движения определяется только с точностью до произвольной константы:

$$v(t) = C + 10t. \qquad (6)$$

Операция нахождения функции $F(x)$ по заданной производной $F'(x) = f(x)$ этой функции называется **интегрированием**

функции $f(x)$.

Функция общего вида $F(x) + C$, полученная в результате интегрирования, называется **неопределенным интегралом**, а любое частное решение $F(x)$ такого рода задачи – **первообразной** исходной функции.

В этих терминах задача нахождения функции $x(t)$ по известной ее производной $v(t)$ является стандартной проблемой интегрирования функции $v(t)$. При этом решение вида (5) представляет собой неопределенный интеграл от функции $v(t)$, тогда как решение вида (1) есть первообразная функции $v(t)$.

Свойства первообразной

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке D. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

для всех $x \in D$.

Если к первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ прибавить любую постоянную C, то полученная функция $F(x) + C$ также является первообразной, поскольку

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x) \tag{2}$$

Справедливо и более сильное утверждение:

Любые две первообразные одной и той же функции **отличаются** друг от друга **не более чем на постоянную** величину C.

Действительно, пусть $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для всех $x \in D$.

Тогда $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ и, следовательно, разность $F_1 - F_2$ есть величина постоянная:

$$F_1(x) = F_2(x) + C. \tag{3}$$

Неопределенный интеграл и его свойства

В дифференциальном исчислении решается задача: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: нахождение функции по ее производной. Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение: функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ в промежутке (a,b), если в любой точке этого промежутка выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$.

Например:

$$f(x)=3x^2 \to F(x)=x^3$$
$$F(x)=x^3+5$$
$$F(x)=x^3-3$$
$$F(x)=x^3+c, \qquad C-const.$$

Определение: Множество всех первообразных функций $F(x)=x^3+c$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx=F(x)+c$.

$f(x)$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла
$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$$
2) Интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов от функций.
$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx \pm g(x)dx$$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ $\qquad$ $\int dx=x+c$;
2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c$;
3. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$ $\qquad$ $\int a^{kx}dx=\dfrac{1}{k}\dfrac{a^{kx}}{\ln a}+c$;
4. $\int e^x dx=e^x+c$ $\qquad$ $\int e^{kx}dx=\dfrac{1}{k}e^{kx}+c$;
5. $\int \sin xdx=\cos x$ $\qquad$ $\int \sin kxdx=-\dfrac{1}{2}\cos kx+c$;
6. $\int \cos xdx=\sin x+c$ $\qquad$ $\int \cos kxdx=\dfrac{1}{k}\sin kx+c$;
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+c$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx}=\dfrac{1}{k}tgkx+c$;
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$ $\qquad$ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx}=-\dfrac{1}{k}ctgkx+c$;
9. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+c$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a} + c$.

Рассмотрим метод непосредственного интегрирования, который основан на прямом использовании таблицы интегралов.

$$\int\left(x^2 + 5x - \frac{1}{x}\right)dx = \int x^2 dx + 5\int xdx - \int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \ln|x| + c.$$

$$\int\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}dx = \int\frac{x^3}{x}dx + 3\int\frac{x^2}{x}dx + 4\int\frac{x}{x}dx = \int x^2 dx + 3\int xdx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + c$$

$$\int\left(2^x + 7\cos x + 5\right)dx = \int 2^x dx + 7\int \cos xdx + 5\int dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 7\sin x + 5x + c.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Выполнить задание по образцу (решить интегралы с помощью таблицы интегралов и свойств интегралов):

1. $\int 3\left(2x^2 - 1\right)^2 dx$; 2. $\int\frac{u^2 - u}{3u}du$; 3. $\int\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{x^2}dx$;

4. $\int\left(\frac{3}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{4\sqrt[3]{t^2}}{}\right)dt$; 5. $\int\left(4 - 3\cos x\right)dx$; 6. $\int\frac{dx}{1 + x^2}$;