ЛЕКЦИЯ
Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение:

Перейдем к другой числовой характеристике случайной величины – к дисперсии.

Заметим, что различные случайные величины могут иметь одно и то же математическое ожидание. Как, например, для случайных величин x и y, заданных следующими законами распределения:

X 0,04 0,6 Y
P_x 0,6 0,4 P_y 0,5 0,5

Математические ожидания их одинаковы:

$$M[X] = -0{,}04 \cdot 0{,}6 + 0{,}06 \cdot 0{,}4 = 0$$

$$M[Y] = -300 \cdot 0{,}25 + 100 \cdot 0{,}75 = 0$$

Однако характер распределения этих величин различен. Величина x принимает значения, мало отличающиеся от ее математического ожидания, а значения величины y сильно отличается от своего математического ожидания.

Таких примеров можно привести множество. Например, в двух учреждениях с различными соотношениями низкооплачиваемых и высокооплачиваемых работников может оказаться одна и та же средняя заработная плата или два различных исправных прибора для измерения одной и той же физической величины при многократных измерениях могут давать одно и тоже среднее значение, что вовсе не означает их одинаковой точности.

Подобного рода примеры убеждают нас в том, что необходимо ввести еще одну числовую характеристику, которая бы позволяла измерять степень разброса или, как еще называют, степень рассеивания значений, принимаемых случайной величины, вокруг ее математического ожидания.

Пусть *x* – дискретная случайная величина, возможные значения которой суть x_1 , x_2 ,…, x_n , M[X] – ее математическое ожидание. Случайную величину *X - M[X]* называют отклонение величины *X* от ее математического ожидания. Таким образом, отклонение есть случайная величина, которая принимает значения

$$x_1 - M[X], x_2 - M[X], \ldots, x_n - M[X]$$

Оказывается, что отклонение не может служить характеристикой рассеивания случайной величины, так как ее математическое ожидание всегда равно нулю. Поэтому для получения характеристики разброса случайной величины введем, вначале математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Обозначим дисперсию случайной величины через *D[x],* тогда согласно определению будем иметь

$D[X]= M[(X\text{-}M\,[X]^2\,)]$

Теперь для случайной величины X введем число $\sigma[X]$, тогда согласно определению будем иметь $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$, которое называется средним квадратичным отклонением случайной величины X.

Если дисперсия характеризует средний размер квадрата отклонения случайной величины *X* от ее математического ожидания, то среднее квадратное отклонение рассматривается как некоторая средняя характеристика этого отклонения.

Дисперсия обладает следующими свойствами, которые примем без доказательства:

1. Дисперсия постоянной величины равно нулю.

2. При умножении случайной величины *X* на постоянное число *C* ее дисперсия умножается на C^2 .

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

На практике часто используют формулу

$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2$

Пример 1.Дискретная случайная величина *X* имеет закон распределения

X

P 0,3 0,5 0,2

Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины *X*.

По формуле находим $M[X] = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9$

Запишем закон распределения квадрата отклонения этой величины, т.е. величины $(X - M[X])^2$

$(X - M[X])^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле имеем

$$D[X] = (0-0{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (1-0{,}9)^2 \cdot 0{,}5 + (2-0{,}9)^2 \cdot 0{,}2 = \\ = 0{,}81 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}5 + 1{,}21 \cdot 0{,}2 = 0{,}49.$$

В соответствии с формулой находим среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ДИСПЕРСИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ.

Вопросы для контроля:

1.Что называется дисперсией?

2. Какими свойствами обладает дисперсия?

3.Определение среднего квадратичного отклонения.

Задания для самостоятельного решения :

1.Симметричная монета подбрасывается 4раза. Случайная величина *X* – «число выпадения герба при этих подбрасываниях». Найдите числовые характеристики случайной величины *X*: $M[X], D[X], \sigma[X]$.

2. Найдите дисперсию дискретной случайной величины *X* – числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.