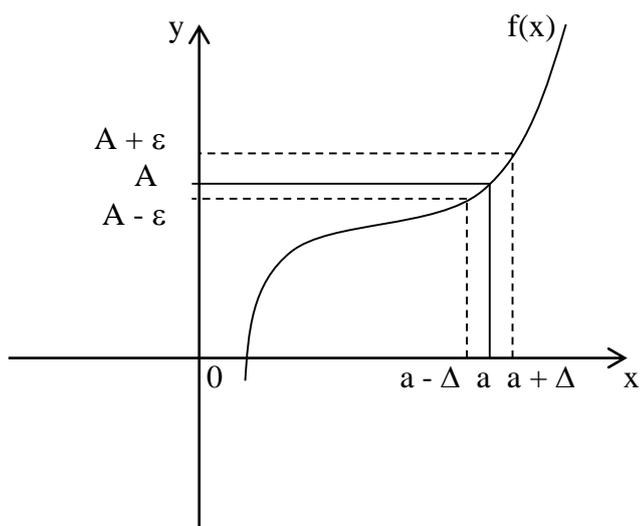


ЛЕКЦИЯ Предел функции.

Переменная и предел – это основные понятия математического анализа. Достаточно напомнить, что ключевым словом в определениях таких известных со школы понятий как производная и интеграл является слово предел.

8.1. Предел функции в точке.



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т.е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена)

Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что

$$0 < |x - a| < \Delta$$

верно неравенство

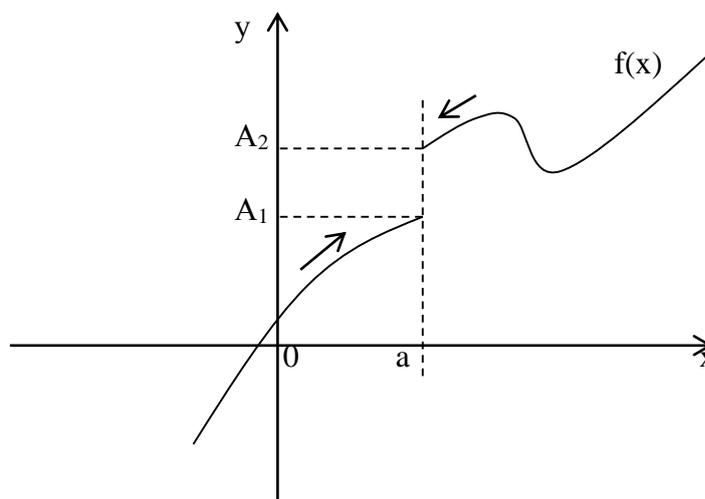
$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

То же определение может быть записано в другом виде:

Если $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то верно неравенство $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Определение. Если $f(x) \rightarrow A_1$ при $x \rightarrow a$ только при $x < a$, то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$ - называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **слева**, а если $f(x) \rightarrow A_2$ при $x \rightarrow a$ только при $x > a$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом** функции $f(x)$ в точке $x = a$ **справа**.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что A – **конечный предел** функции $f(x)$.

8.2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности.

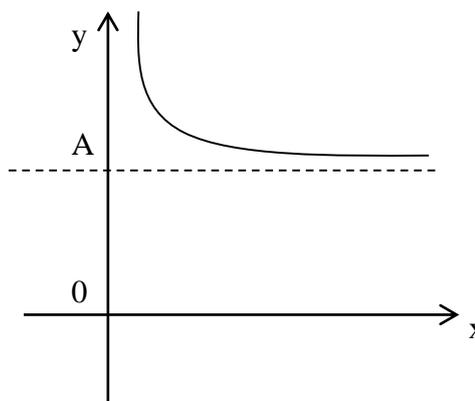
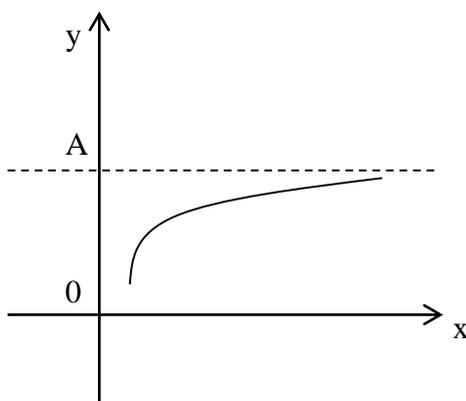
Определение. Число A называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех x , $|x| > M$ выполняется неравенство

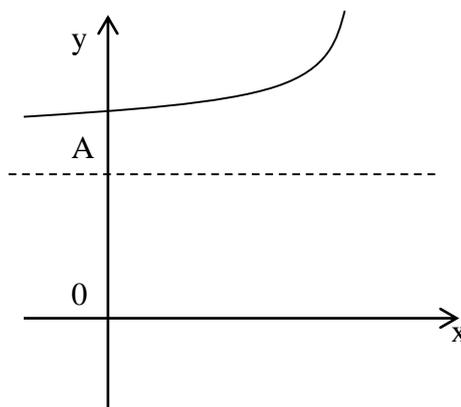
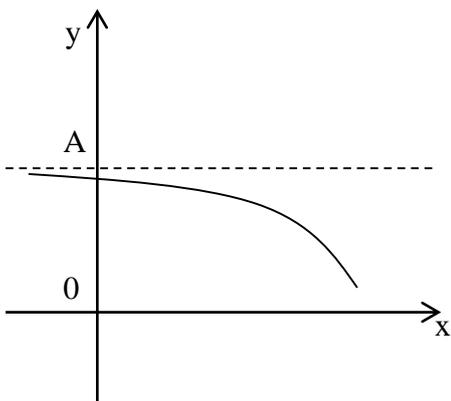
$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При этом предполагается, что функция $f(x)$ определена в окрестности бесконечности.

Записывают: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Графически можно представить:





Аналогично можно определить пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ для любого $x > M$ и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ для любого $x < M$.

8.3. Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. $\lim_{x \rightarrow a} C = C$, где $C = \text{const}$.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \rightarrow a$.

Теорема 2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Следствие. $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Теорема 4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ при $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

Теорема 5. Если $f(x) > 0$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то $A > 0$.

Аналогично определяется знак предела при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Если $g(x) \leq f(x) \leq u(x)$ вблизи точки $x = a$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A$, то и

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** вблизи точки $x = a$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ вблизи точки $x = a$.

Теорема 7. Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x \rightarrow a$, то она ограничена вблизи точки $x = a$.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, т.е. $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогда

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \text{ или}$$

$$|f(x)| < \varepsilon + |A|, \text{ т.е.}$$

$$|f(x)| < M, \text{ где } M = \varepsilon + |A|$$

Теорема доказана.

8.4. Бесконечно малые функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, где a может быть числом или одной из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Бесконечно малой функция может быть только если указать к какому числу стремится аргумент x . При различных значениях a функция может быть бесконечно малой или нет.

Пример. Функция $f(x) = x^n$ является бесконечно малой при $x \rightarrow 0$ и не является бесконечно малой при $x \rightarrow 1$, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имела предел, равный A , необходимо и достаточно, чтобы вблизи точки $x = a$ выполнялось условие

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$ ($\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$).

Свойства бесконечно малых функций:

- 1) Сумма фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 2) Произведение фиксированного числа бесконечно малых функций при $x \rightarrow a$ тоже бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$.
- 3) Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную вблизи точки $x = a$ является бесконечно малой функцией при $x \rightarrow a$.
- 4) Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой не равен нулю есть величина бесконечно малая.

Используя понятие бесконечно малых функций, приведем доказательство некоторых теорем о пределах, приведенных выше.

Доказательство теоремы 2. Представим $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$, где

$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, тогда

$$f(x) \pm g(x) = (A + B) + \alpha(x) + \beta(x)$$

$A + B = \text{const}$, $\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая, значит

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Теорема доказана.

8.5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Определение. Предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, где a – число, **равен бесконечности**, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что неравенство

$$|f(x)| > M$$

выполняется при всех x , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записывается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

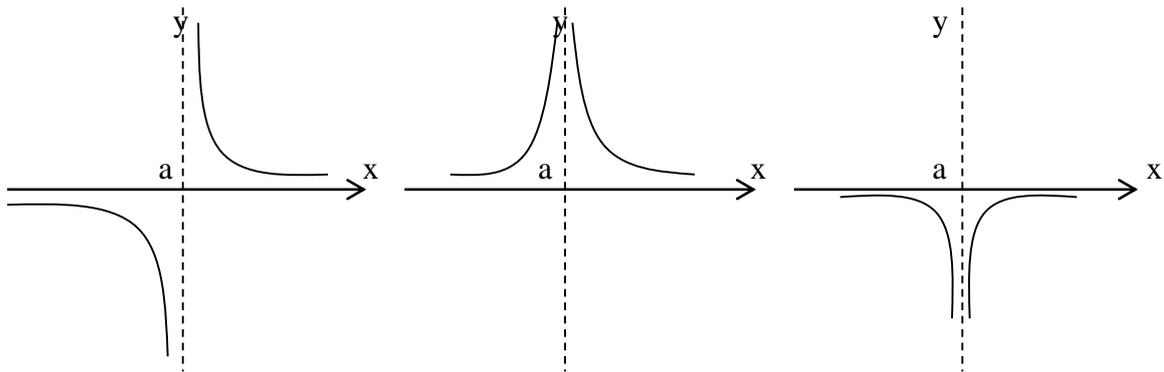
Собственно, если в приведенном выше определении заменить условие $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

а если заменить на $f(x) < M$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Графически приведенные выше случаи можно проиллюстрировать следующим образом:



Определение. Функция называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, где a – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число или одна из величин ∞ , $+\infty$ или $-\infty$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций осуществляется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Если $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ (если $x \rightarrow \infty$) и не обращается в ноль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty$$

8.6. Сравнение бесконечно малых функций.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$. Будем обозначать эти функции α , β и γ соответственно. Эти бесконечно малые функции можно сравнивать по скорости их убывания, т.е. по скорости их стремления к нулю.

Например, функция $f(x) = x^{10}$ стремится к нулю быстрее, чем функция $f(x) = x$.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то функция α называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция β .

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = const$, то α и β называются **бесконечно малыми одного порядка**.

Определение. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то функции α и β называются **эквивалентными бесконечно малыми**. Записывают $\alpha \sim \beta$.

Пример. Сравним бесконечно малые при $x \rightarrow 0$ функции $f(x) = x^{10}$ и $f(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^9 = 0$$

т.е. функция $f(x) = x^{10}$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем $f(x) = x$.

Определение. Бесконечно малая функция α называется **бесконечно малой порядка k** относительно бесконечно малой функции β , если предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta^k}$ конечен и отличен от нуля.

Однако следует отметить, что не все бесконечно малые функции можно сравнивать между собой. Например, если отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ не имеет предела, то функции несравнимы.

Пример. Если $\alpha = x \sin x$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = 1$, т.е. функция α – бесконечно малая порядка 2 относительно функции β .

Пример. Если $\alpha = x \sin \frac{1}{x}$, $\beta = x$, то при $x \rightarrow 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, т.е. функция α и β

несравнимы.

Свойства эквивалентных бесконечно малых.

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \right)$

2) Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \right)$

3) Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}} = 1 \right)$

4) Если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = k$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Следствие: а) если $\alpha \sim \alpha_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{\beta}$

б) если $\beta \sim \beta_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta} = k$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha}{\beta_1}$

Свойство 4 особенно важно на практике, т.к. оно фактически означает, что предел отношения бесконечно малых не меняется при замене их на эквивалентные бесконечно малые. Этот факт дает возможность при нахождении пределов заменять бесконечно малые на эквивалентные им функции, что может сильно упростить вычисление пределов.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x}$

Так как $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$ и $\sin 7x \sim 7x$ при $x \rightarrow 0$, то, заменив функции эквивалентными бесконечно малыми, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$.

Так как $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$.

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$.

Если α и β - бесконечно малые при $x \rightarrow a$, причем β - бесконечно малая более высокого порядка, чем α , то $\gamma = \alpha + \beta$ - бесконечно малая, эквивалентная α . Это можно доказать следующим равенством $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = 1$.

Тогда говорят, что α - **главная часть** бесконечно малой функции γ .

Пример. Функция $x^2 + x$ - бесконечно малая при $x \rightarrow 0$, x - главная часть этой функции. Чтобы показать это, запишем $\alpha = x^2$, $\beta = x$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

8.7. Некоторые замечательные пределы.

Первый замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$,

$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ - многочлены.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} = x^{n-m} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Итого: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$$

Второй замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Третий замечательный предел. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$

Часто если непосредственное нахождение предела какой - либо функции представляется сложным, то можно путем преобразования функции свести задачу к нахождению замечательных пределов.

Кроме трех, изложенных выше, пределов можно записать следующие полезные на практике соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(x - x_0) \cos x \cos x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cos x \cos x_0} = 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\pi/4 - x)}{\pi - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{-\sin(\pi/4 - x)}{2\sqrt{2}(\pi/4 - x)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \left\{ \begin{array}{l} y = \pi/2 - x \\ x = \pi/2 - y \\ \pi - 2x = \pi - \pi + 2y \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi/2 - y)}{2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \left\{ \begin{array}{l} y = x-1 \\ x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y+4}{y} \right)^{y+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{y} \right)^4 = \\ &= \left\{ z = \frac{y}{4} \right\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^{4z} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z} \right)^z \right)^4 = e^4 \end{aligned}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$

$$D = 36 - 32 = 4;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4;$$

$$x_2 = (6 - 2)/2 = 2;$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0;$$

$$D = 64 - 48 = 16;$$

$$x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x} \quad \text{Домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное}$$

$$\begin{aligned} \text{выражение: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})} = \\ &= \frac{2}{-1 \cdot (1+1)} = -1. \end{aligned}$$

Пример. Найти предел.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Пример. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3), \text{ т.к.}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad | \quad x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline -5x^2 + 11x \\ -5x^2 + 5x \\ \hline 6x - 6 \\ 6x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = -2$$

Пример. Найти предел.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2h) - 2\sin(a+h) + \sin a}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{2a+2h}{2} \cos \frac{2h}{2} - 2\sin(a+h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+h)(\cosh-1)}{h^2} = \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \sin(a+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2} = 2\sin a \cdot (-1/2) = -\sin a \end{aligned}$$

Для самостоятельного решения:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 + 5x - 6}{x^3 + 2x^2 + 7x - 1} = \infty$
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3 + 4x + 5)(x^2 + x + 1)}{(x+2)(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x - 1)} = 2$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12} = \frac{3}{4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1} = -\frac{1}{4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1} = 3$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{7 + 2x - x^2}}{x^2 - 2x} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16} - \text{не определен.}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение предела функции точке.
2. Дайте определение предела функции на бесконечности.
3. Что такое односторонние пределы функции?
4. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
5. Что такое первый, второй и третий замечательные пределы?
6. Дайте определение бесконечно малой функции.
7. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых функций.
8. Сформулируйте принцип эквивалентности бесконечно малых функций.
9. Дайте определение бесконечно большой функции.
10. Сформулируйте основные свойства бесконечно больших функций.
11. В чем заключается связь бесконечно больших и бесконечно малых функций?

Лекция № 2. Непрерывность функции и ее разрывы.

9.1. Непрерывность функции в точке.

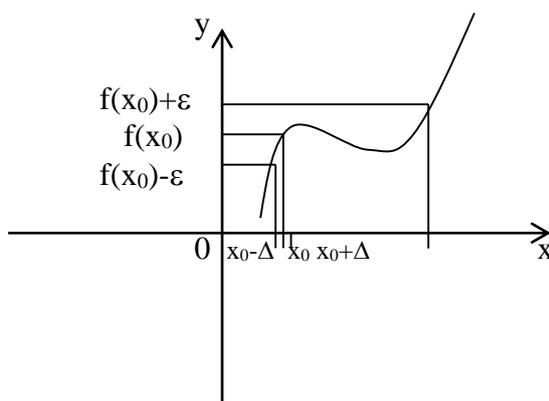
Определение. Функция $f(x)$, определенная в окрестности некоторой точки x_0 , называется **непрерывной в точке** x_0 , если предел функции и ее значение в этой точке равны, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

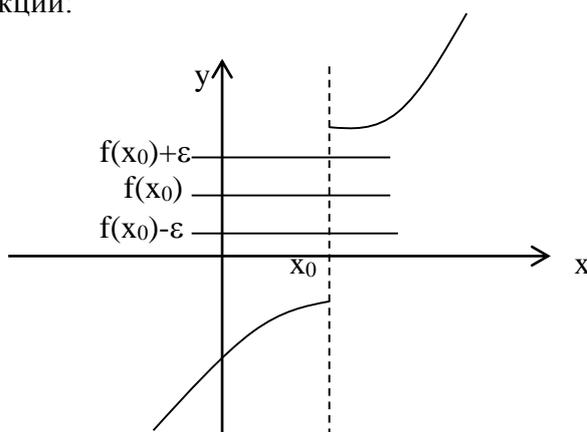
Тот же факт можно записать иначе: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

Определение. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , но не является непрерывной в самой точке x_0 , то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Пример непрерывной функции:



Пример разрывной функции:



Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для любых x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \Delta$$

верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если приращение функции в точке x_0 является бесконечно малой величиной.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

9.2. Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность и произведение непрерывных в точке x_0 функций – есть функция, непрерывная в точке x_0 .

2) Частное двух непрерывных функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ – есть непрерывная функция при условии,

что $g(x)$ не равна нулю в точке x_0 .

3) Суперпозиция непрерывных функций – есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом:

Если $u = f(x)$, $v = g(x)$ – непрерывные функции в точке $x = x_0$, то функция $v = g(f(x))$ – тоже непрерывная функция в этой точке.

Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

9.3. Непрерывность некоторых элементарных функций.

1) Функция $f(x) = C$, $C = \text{const}$ – непрерывная функция на всей области определения.

2) Рациональная функция $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$ непрерывна для всех значений

x , кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3) Тригонометрические функции непрерывны на своей области определения.

Докажем свойство 3 для функции $y = \sin x$.

Запишем приращение функции $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, или после преобразования:

$$\Delta y = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2} \right) = 0$$

Действительно, имеется предел произведения двух функций $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$ и $\sin \frac{\Delta x}{2}$. При

этом функция косинус – ограниченная функция при $\Delta x \rightarrow 0$ $\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 1$, а т.к.

предел функции синус $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0$, то она является бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$.

Таким образом, имеется произведение ограниченной функции на бесконечно малую, следовательно это произведение, т.е. функция Δy – бесконечно малая. В соответствии с рассмотренными выше определениями, функция $y = \sin x$ – непрерывная функция для любого значения $x = x_0$ из области определения, т.к. ее приращение в этой точке – бесконечно малая величина.

Аналогично можно доказать непрерывность остальных тригонометрических функций на всей области определения.

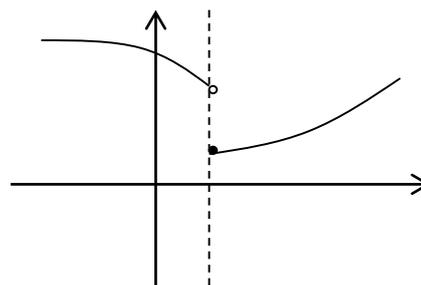
Вообще следует заметить, что все основные элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

9.4. Точки разрыва и их классификация.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную в окрестности точки x_0 , за исключением может быть самой этой точки. Из определения точки разрыва функции следует, что $x = x_0$ является точкой разрыва, если функция не определена в этой точке, или не является в ней непрерывной.

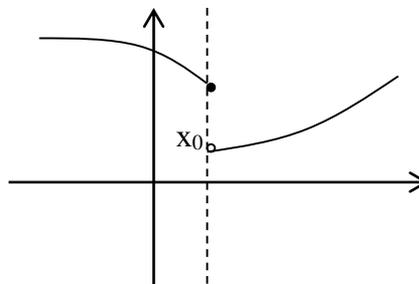
Следует отметить также, что непрерывность функции может быть односторонней. Поясним это следующим образом.

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.



x_0

Если односторонний предел (см. выше) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.



Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке x_0 или не является непрерывной в этой точке.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы.

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = x_0$, достаточно того, что она определена слева и справа от нее.

Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок. В некоторых частных случаях точку разрыва 1-го рода еще иногда называют **устранимой** точкой разрыва, но подробнее об этом поговорим ниже.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва 2-го рода**, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет хотя бы одного из односторонних пределов или хотя бы один из них бесконечен.

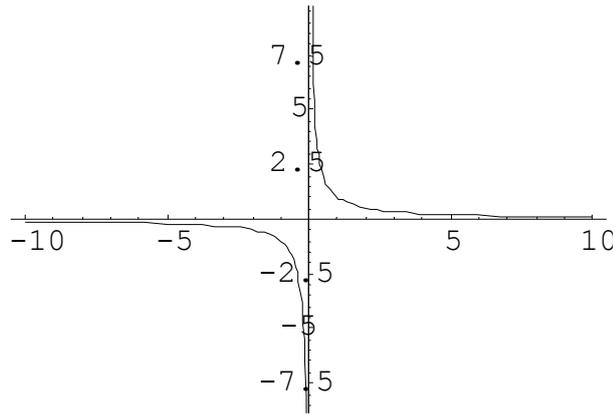
Пример. Функция Дирихле (Дирихле Петер Густав(1805-1859) – немецкий математик, член- корреспондент Петербургской АН 1837г)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное число} \\ 0, & x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

не является непрерывной в любой точке x_0 .

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2-го рода, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty.$$

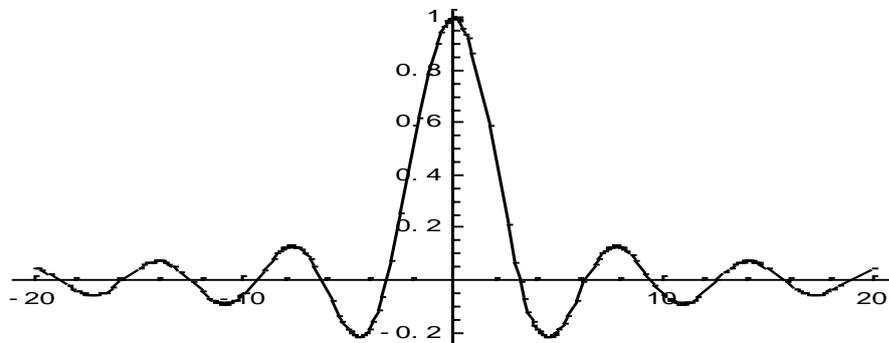


Пример. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

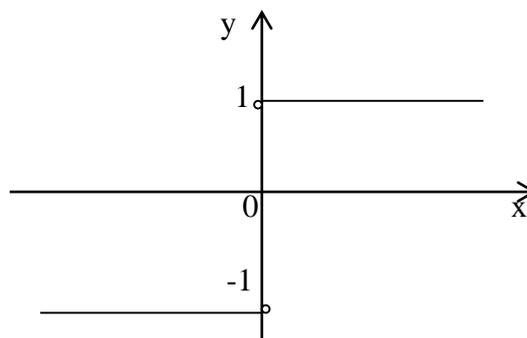
Функция не определена в точке $x = 0$, но имеет в ней конечный предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, т.е. в точке $x = 0$ функция имеет точку разрыва 1 – го рода. Это – устранимая точка разрыва, т.к. если доопределить функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

График этой функции:



Пример. $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0 \\ -1, & \text{при } x < 0 \end{cases}$



Эта функция также обозначается $\text{sign}(x)$ – знак x . В точке $x = 0$ функция не определена. Т.к. левый и правый пределы функции различны, то точка разрыва – 1 – го рода. Если доопределить функцию в точке $x = 0$, положив $f(0) = 1$, то функция будет непрерывна справа, если положить $f(0) = -1$, то функция будет непрерывной слева, если положить $f(x)$ равное какому-либо числу, отличному от 1 или -1 , то функция не будет непрерывна ни слева, ни справа, но во всех случаях тем не менее будет иметь в точке $x = 0$ разрыв 1 – го рода. В этом примере точка разрыва 1 – го рода не является устранимой.

Таким образом, для того, чтобы точка разрыва 1 – го рода была устранимой, необходимо, чтобы односторонние пределы справа и слева были конечны и равны, а функция была бы в этой точке не определена.

9.5. Непрерывность функции на интервале и на отрезке.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на интервале (отрезке)**, если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1: (Первая теорема Вейерштрасса (Вейерштрасс Карл (1815-1897)- немецкий математик)). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке, т.е. на отрезке $[a, b]$ выполняется условие $-M \leq f(x) \leq M$.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке x_0 , ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок $[a, b]$ на бесконечное количество отрезков, которые “стягиваются” к точке x_0 , то образуется некоторая окрестность точки x_0 .

Свойство 2: Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.

Т.е. существуют такие значения x_1 и x_2 , что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причем

$$m \leq f(x) \leq M$$

Отметим эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например – $f(x) = \sin x$).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется **колебанием** функции на отрезке.

Свойство 3: (Вторая теорема Больцано – Коши). Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке все значения между двумя произвольными величинами.

Свойство 4: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то существует некоторая окрестность точки x_0 , в которой функция сохраняет знак.

Свойство 5: (Первая теорема Больцано (1781-1848) – Коши). Если функция $f(x)$ -непрерывная на отрезке $[a, b]$ и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где $f(x) = 0$.

Т.е. если $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то $\exists x_0: f(x_0) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$ таких, что

$$|x_2 - x_1| < \Delta$$

верно неравенство

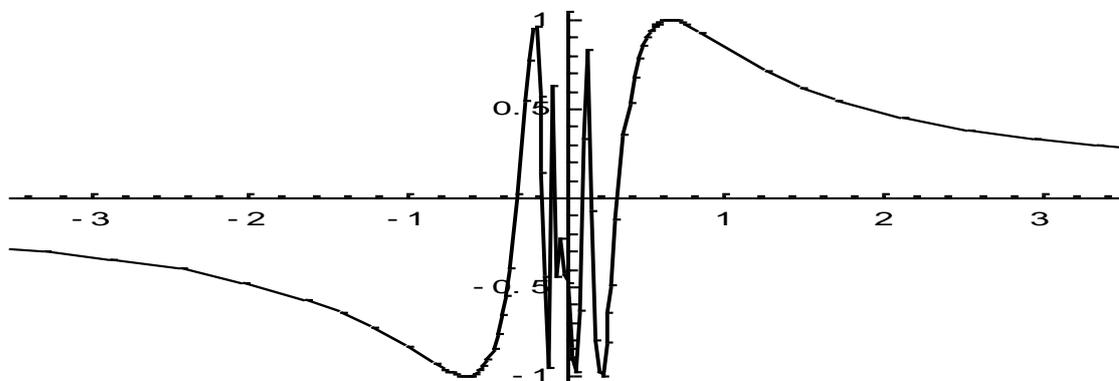
$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Отличие равномерной непрерывности от “обычной” в том, что для любого ε существует свое Δ , не зависящее от x , а при “обычной” непрерывности Δ зависит от ε и x .

Свойство 6: Теорема Кантора (Кантор Георг (1845-1918)- немецкий математик). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

(Это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов.)

Пример. $y = \sin \frac{1}{x}$



Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, a)$, но не является на нем равномерно непрерывной, т.к. существует такое число $\Delta > 0$ такое, что существуют значения x_1 и x_2 такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε - любое число при условии, что x_1 и x_2 близки к нулю.

Свойство 7: Если функция $f(x)$ определена, монотонна и непрерывна на некотором промежутке, то и обратная ей функция $x = g(y)$ тоже однозначна, монотонна и непрерывна.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = 3$$

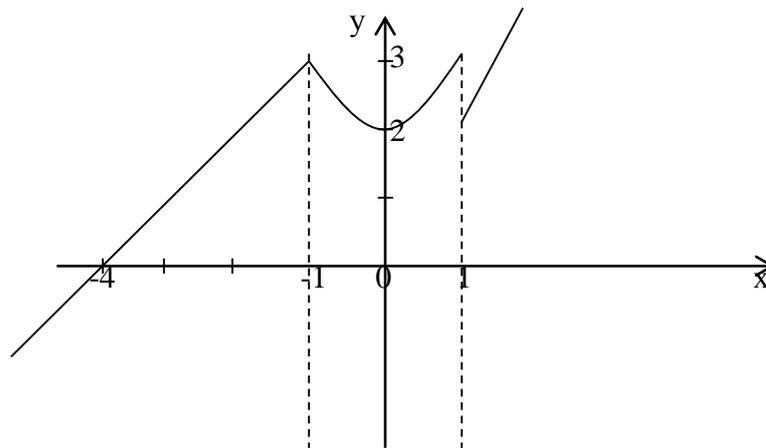
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2$$

в точке $x = -1$ функция непрерывна

в точке $x = 1$ точка разрыва 1 – го рода



Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$$

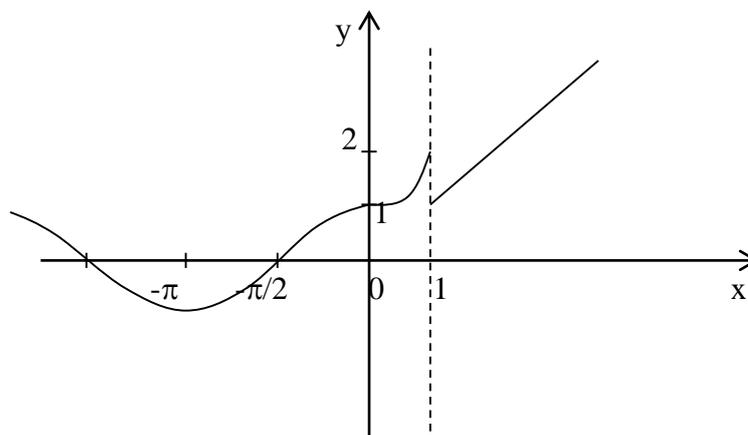
$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$$

в точке $x = 0$ функция непрерывна, в точке $x = 1$ точка разрыва 1 – го рода



ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение непрерывности функции в точке.
2. Приведите примеры функций непрерывных в точке.
3. Дайте определение непрерывности функции на интервале.
4. Что такое точка разрыва? Точки разрыва первого и второго рода.
5. Приведите примеры точек разрыва первого и второго рода.
6. Сформулируйте основные свойства непрерывных функций.
7. Приведите примеры непрерывности элементарных функций.