

1. Матрицы и основные операции над ними 3

1.1. Понятие матрицы 3

1.2. Виды матриц 3

1.4. Действия над матрицами 3

1.5. Миноры и алгебраические дополнения 4

1.6. Присоединенная и обратная матрицы 4

1.7. Ранг матрицы и элементарные преобразования матрицы 5

1.8. Вырожденность (дефект) матрицы 5

2. Векторы и основные операции над ними 5

2.1. Понятие вектора 5

2.2. Основные операции над векторами 5

3. Линейное векторное метрическое нормированное пространство 6

3.1. Понятия и определения 6

3.2. Линейное преобразование 7

3.3. Подпространство 8

4. Матричные преобразования 8

4.1. Преобразование подобия 8

4.2. Ортогональное преобразование 9

4.3. Конгруэнтное преобразование 9

5. Собственные числа, собственные векторы и диагонализация матриц 9

5.1. Собственные числа и собственные векторы матрицы 9

5.2. Диагонализация матриц 10

6. Функции от матриц 11

6.1. Степени матриц 11

6.2. Функции от матриц 12

6.3. Теоремы о функциях от матриц 13

7. Квадратичная форма 14

Список литературы 16

1. Матрицы и основные операции над ними

1.1. Понятие матрицы

Матрицей A размером $m \times n$ или просто $(m \times n)$ -матрицей называют прямоугольную таблицу, содержащую m строк и n столбцов, элементами которой являются вещественные или комплексные числа.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

2 матрицы одной и той же размерностью равны, если равны их соответствующие элементы.

1.2. Виды матриц

Матрицу называют столбцовой матрицей, если она состоит из одного столбца, то есть имеет размерность $m \times 1$.

Матрица называется строчной, если она имеет размерность $1 \times n$.

Диагональная матрица – это такая квадратная матрица, все элементы которой, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю. Главная диагональ квадратной матрицы – это элементы a_{ii} , где $i=1, 2, \dots, m$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется нулевой. Если все элементы главной диагонали матрицы равны единице, то такая матрица называется единичной. Если все элементы главной диагонали матрицы равны одному и тому же числу, то такая матрица называется скалярной.

Квадратная матрица, все элементы ниже главной диагонали которой равны нулю, называется верхней треугольной матрицей. Квадратная матрица, все элементы выше главной диагонали которой равны нулю, называется нижней треугольной матрицей.

Квадратная матрица называется симметрической, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$.

1.4. Действия над матрицами

Суммой двух матриц A и B одной и той же размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой находятся из условия $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Произведение матрицы A размерности $m \times n$ на число k – это такая матрица C размерности $m \times n$, элементы которой находятся по формуле $c_{ij}=k \cdot a_{ij}$.

Произведение согласованных матриц A размерностью $m \times n$ и B размерностью $n \times r$ называется матрица C размерностью $m \times r$, элементы которой равны сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на элементы j -ой строки матрицы B :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Транспонированием матрицы A называется матрица, у которой строки и столбцы поменялись местами.

Пусть $A(t)$ – матрица $m \times n$, элементы которой $a_{ij}(t)$ являются дифференцируемыми функциями скалярной переменной t . Производная от $A(t)$ по переменной t определяется как

$$\frac{d}{dt} [A(t)] = \dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} & \frac{da_{12}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \frac{da_{21}(t)}{dt} & \frac{da_{22}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{2n}(t)}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{m1}(t)}{dt} & \frac{da_{m2}(t)}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Подобно произведению от матрицы интеграл от матрицы определяется как матрица, образованная из интегралов от элементов исходной матрицы:

$$\int A(t) dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t) dt & \int a_{12}(t) dt & \dots & \int a_{1n}(t) dt \\ \int a_{21}(t) dt & \int a_{22}(t) dt & \dots & \int a_{2n}(t) dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int a_{m1}(t) dt & \int a_{m2}(t) dt & \dots & \int a_{mn}(t) dt \end{bmatrix}.$$

+Определитель квадратной матрицы A , записываемый как $|A|$, равен алгебраической сумме всех возможных произведений n элементов, содержащих лишь один элемент из каждой строки и столбца. При этом каждое из произведений положительно или отрицательно в соответствии со следующим правилом. Расположить все возможные произведения в порядке возрастания первых индексов, например, $a_{13}a_{22}a_{31} \dots$.

Определить инверсию как расположение большего целого числа перед меньшим. Знак произведения является положительным, если число инверсий вторых индексов является четным; в противном случае он отрицательный. Например, последовательность 321 содержит три инверсии: 3 перед 2, 3 перед 1 и 2 перед 1.

1.5. Миноры и алгебраические дополнения

Если в определителе $|A|$ вычеркнуть i -ю строку и j -ый столбец, то оставшиеся $n-1$ строк и столбцов образуют определитель $|M_{ij}|$, называемый минором элемента a_{ij} . Минор k -го порядка составляется из k параллельных столбцов этой матрицы.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} равно минору a_{ij} , взятому со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

1.6. Присоединенная и обратная матрицы

Если A – квадратная матрица, определитель которой не равен нулю, а C_{ij} – алгебраическое дополнение a_{ij} , то присоединенной для A называется матрица, образованная из алгебраических дополнений C_{ji} , то есть

$$\text{Adj } A = [C_{ji}].$$

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если она удовлетворяет условию

$$AA^{-1} = I, \text{ где } I \text{ – единичная матрица.}$$

Обратная матрица A^{-1} находится из условия

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

1.7. Ранг матрицы и элементарные преобразования матрицы

Ранг матрицы – это наивысший порядок минора матрицы, отличного от нуля.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся такие преобразования, которые не изменяют ранг этой матрицы. К таким преобразованиям относятся:

1. Транспонирование матрицы;
2. Перестановка двух строк или столбцов матрицы;
3. Умножение элементов любой строки или столбца на постоянное число;
4. Добавление к элементам ряда элементов параллельного ряда, умноженных на постоянное число.

Две матрицы одной и той же размерности называются эквивалентными, если они имеют одинаковый ранг.

1.8. Вырожденность (дефект) матрицы

Если ряды матрицы связаны одним соотношением, то матрица называется просто вырожденной или имеющей вырождение (дефект) кратности 1. Если ряды матрицы связаны более, чем одним соотношением, то матрица называется многократно вырожденной. При q таких соотношениях матрица имеет дефект кратности q .

2. Векторы и основные операции над ними

2.1. Понятие вектора

Вектором или вектор-столбцом в n -мерном пространстве называется столбцовая матрица порядка $n \times 1$. Это не что иное, как распространение понятия векторов в двух- и трехмерных пространствах на n -мерное пространство. Если n больше трех, то геометрическое представление утрачивает свой смысл. Однако

терминология, связанная с привычными координатными системами, тем не менее оказывается весьма полезной.

2.2. Основные операции над векторами

Так как вектора – это те же матрицы, но с размерностью $n \times 1$, то для них точно так же вводятся операции транспонирования, суммы и произведения на число. Однако для векторов помимо этих операций вводятся и другие действия.

Скалярное (или внутренне) произведение двух векторов x и y определяется как

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Внешнее произведение векторов x и y определяется как

$$x \otimes y = x \cdot y^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

Два вектора называются ортогональными, если $\langle x, y \rangle = 0$.

Длина вектора x , обозначаемая через $\|x\|$, определяется как квадратный корень из скалярного произведения x и x . Вектор называется единичным, если его длина равна единице.

3. Линейное векторное метрическое нормированное пространство

3.1. Понятия и определения

Говорят, что множество имеет структуру, если между элементами множества установлены определенные соотношения. Множество, наделенное структурой, называют пространством.

Пусть X – произвольное множество. Свяжем с каждой парой элементов из X некоторое вещественное неотрицательное число $d \geq 0$. Это число называют расстоянием или метрикой в X , если для любых $x, y, z \in X$ оно удовлетворяет следующим трем аксиомам:

1. аксиома идентичности: $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома идентичности);
2. аксиома симметрии: $d(x, y) = d(y, x)$;
3. аксиома треугольника: для любой тройки $x, y, z \in X$ имеет место $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Метрическим пространством называют пару (X, d) , то есть множество X с определенной на нем метрикой d . Элементы множества X называют точками метрического пространства (X, d) .

Метрическое пространство называется линейным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) каждой паре элементов $x, y \in X$ однозначно определен третий элемент $z \in X$, называемый их суммой и обозначаемый $x+y$, причем

$x+y=y+x$ (КОММУТАТИВНОСТЬ);

$$x+(y+v)=(x+y)+v \text{ (ассоциативность);}$$

в X существует такой элемент 0 , что $x+0=x$ для всех $x \in X$ (существование нуля);

2) для любого числа a и любого элемента $x \in X$ определен элемент $ax \in X$, причем

$$(a+b)x = ax + bx; a(x+y) = ax + ay.$$

Условия 1 и 2 называют условиями аддитивности и однородности линейного пространства. Множества, элементы которых допускают выполнение операций сложения и умножения на скаляр, весьма разнообразны. Однако в дальнейшем сосредоточим свое внимание на линейных пространствах, элементами которых являются векторы или вектор-столбцы. Такое пространство называется векторным пространством.

Совокупность векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется линейно-независимой, если существуют действительные числа $k_1, k_2, \dots, k_n$, среди которых хотя бы одно не равнялось нулю, такие, что выполняется условие

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$$

Чтобы определить линейную зависимость или независимость совокупности векторов, можно использовать несколько способов.

1) Квадратная матрица называется особенной, если ее строки или столбцы линейно-зависимы. В этом случае $\det A=0$.

2) Правило вырожденности Сильвестра. Дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждой из матриц и не выше суммы дефектов матриц.

3) Определитель Грама. Определитель Грама для системы векторов строится в предположении, что выполняется соотношение

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$$

Записывая последовательно скалярные произведения x_i и обеих частей этого уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} k_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + k_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle &= 0, \\ k_1 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle &= 0, \\ \dots & \\ k_1 \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_2 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Система однородных уравнений имеет нетривиальное решение для k_i только в том случае, если определитель матрицы с коэффициентами $[<x_i, x_j>]$ равен нулю. Этот определитель называется определителем Грама и равен

$$G = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \dots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \dots & \langle x_2, x_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \langle x_m, x_2 \rangle & \dots & \langle x_m, x_m \rangle \end{vmatrix}.$$

Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда определитель Грама для этой системы векторов равен нулю. Отметим, что в случае ортогональных векторов определитель Грама является диагональным определителем.

Базисом называется упорядоченное множество линейно-независимых векторов. Базисов в конкретном векторном пространстве может быть бесконечно много. Однако число векторов в базисе всегда меньше или равно определенному значению. Максимальное число линейно-независимых векторов в данном векторном пространстве называется размерностью данного векторного пространства.

Любой вектор векторного пространства можно разложить по базису этого пространства и представить в виде:

$$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n$$

,где $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базисные векторы пространства, а коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_n$ называются координатами данного вектора в базисе $e = e_1, e_2, \dots, e_n$

Линейное пространство называют нормированным линейным пространством, если для каждого $x \in X$ существует неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой x , которое удовлетворяет следующим условиям:

$\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

$\|ax\|=|a| \cdot \|x\|$;

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

+Нетрудно установить, что величина $\|x-y\|$ обладает всеми свойствами расстояния $d(x, y)$ в метрическом пространстве