МАТЕМАТИКА 2 КУРС ДЛЯ ЗИО И ПОСО

Практические работы

Определенный интеграл и его свойства

Цель: научиться вычислять определенные интегралы, используя непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям.

1. Определенный интеграл

Пусть функция *f(x)* определена на отрезке [a; b]. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1} \le x \le x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Интегральной суммой для функции *f(x)* на отрезке [a; b] называется сумма вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

Определение. *Определенным интегралом* от функции *f(x)* на отрезке [a; b] называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Для вычисления определенного интеграла от функции *f(x)* служит *формула Ньютона-Лейбница:*

т. е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

2. Основные свойства определенного интеграла

1^0. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если *a* = const, то

$$\int_a^b a\, f(x)dx = a\int_a^b f(x)dx$$

2^0. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3^0. Если a < c < b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4^0. Если функция *f(x)* неотрицательна на отрезке [a; b], где a < b, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

5^0. Если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in$ [a; b], где a < b, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x(dx$$

3. Методы вычисления определенного интеграла

Непосредственное интегрирование

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, нужно:

1) найти какую-нибудь первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$ (найти неопределенный интеграл от функции $f(x)$, в котором можно принять $C = 0$);

2) в полученном выражении подставить вместо x сначала верхний предел a, а затем нижний предел b, и из результата первой подстановки вычесть результат второй.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{2}(x^2 - 3x + 7)\,dx$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница получаем: $\int_{-1}^{2}(x^2 - 3x + 7)\,dx$ =

$$=\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 7\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1)\right) = 19,5$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x\Big|_0^1 = arctg\,1 - arctg\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

Пример 3. Найти $\int_a^b dx$

Решение. $\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a$

Метод замены переменной (метод подстановки)

При вычислении определенного интеграла методом подстановки новая переменная вводится подобно случаю неопределенного интеграла. Однако в отличие от неопределенного интеграл а, где в полученном результате мы снова возвращались к прежнему переменному, здесь этого делать не надо.

Пример. Вычислить $\int_1^2 (2x-1)^3\,dx$

Решение. Введем новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x - 1 = t$. Дифференцируя, имеем:

$d(2x-1) = dt,$

$(2x-1)'dx = dt,$

$2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

Находим новые пределы интегрирования. Для этого подставим в соотношение $2x - 1 = t$ значения $x = 1$ и $x = 2$, соответственно получим: $t_н = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$t_в = 2\cdot 2 - 1 = 3$

Следовательно,

$$\int_1^2 (2x-1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 t^3\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4\Big|_1^3 = \frac{1}{8}(3^4-1^4) = \frac{80}{8} = 10$$

<u>Интегрирование по частям</u>

Если функции *u(x)* и *v(x)* и их производные *u′(x)* и *v′(x)* непрерывны в промежутке $a \le x \le b$, то формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид:

Пример. Вычислить $\int_0^1 x e^x\,dx$

Решение. Положим $u = x,\ dv = e^x dx$,

Тогда $du = dx = (x)'dx = dx$,

$v = \int e^x\,dx = e^x$

Следовательно, $\int_0^1 x e^x\,dx = x e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (1\cdot e^1 - 0\cdot e^0) - e^x\Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$

Упражнения

Вычислить определенные интегралы и прислать фотографию выполненных работ по адресу:

1. $\int_0^2 (5x^3+6)\,dx$

2. $\int_{-1}^1 (x^3+2x)\,dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$

4. $\int_{-0,5}^{0,5} 3\,(1+z^2)\,dz$

5. $\int_3^6 \frac{dx}{x}$

6. $\int_0^1 \frac{3\,dx}{x+3}$

7. $\int_4^5 (4-x)^3\,dx$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x-\frac{\pi}{6})\,dx$

9. $\int_0^{\pi} \cos 4x\,dx$

10. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

11. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$

12. $\int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$

13. $\int_0^1 \ln(1 + x^2)\, dx$

14. $\int_0^1 x e^{-x}\, dx$

15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4 - x\sin x}{x}\, dx$

16. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$