ЛЕКЦИЯ на тему:
«Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей».

Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятностей:

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связан с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется событием.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется случайным. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют достоверным, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, - невозможным.

События называются несовместными, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются совместными, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются противоположными, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е. $P(A) = m / n$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т.е. $0 \le P(A) \le 1$. Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному - вероятность $P(A) = 1$

Пример 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Общее число различных исходов есть n = 1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m = 200. Согласно формуле, получим $P(A) = 200 / 1000 = 1 / 5 = 0,2$.

Пример 2. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

Обозначим событие, состоящее в появлении черного шара, через A. Общее число случаев $n = 5 + 3 = 8$. Число случаев m, благоприятствующих появлению события A, равно 3. По формуле получим $P(A) = m/n = 3/8 = 0{,}375$.

Пример 3. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Обозначим событие, состоящее в появлении двух черных шаров через A. Общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 элементов (12 + 8) по два:

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

Число случаев m, благоприятствующих событию A, составляет

$$m = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

По формуле находим вероятность появления двух черных шаров:

$$P(A) = m/n = 28/190 = 14/95 = 0{,}147$$

<u>Теорема сложения вероятностей. Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей:</u>

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равно сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример 4. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что по крайней мере она из взятых деталей окажется стандартной.

Очевидно, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная и D – три детали стандартные.

Таким образом, событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: A = B + C + D. По теореме сложения имеем P(A) = P(B) + P(C) + P(D). Находим вероятность каждого из этих событий:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{20}^3}=\frac{5}{1}\cdot\frac{15\cdot 14}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{35}{76};$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{15}{1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38};$$

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Сложив найденные величины, получим $P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$

Пример 5. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.

Пусть A – событие, состоящее в том, что наудачу взятое число кратно 3, а B – в том, что оно кратно 5. Найдем $P(A+B)$. Так как A и B совместные события, то воспользуемся формулой: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, 98, 99. Из них 30 являются кратными 3 (благоприятствуют наступлению события A); 18 – кратными 5 (благоприятствуют наступлению события B) и 6 – кратными одновременно 3 и 5 (благоприятствуют наступлению события AB). Таким образом, $P(A)=30/90=1/3$,

$P(B)=18/90=1/5$, $P(AB)=6/90=1/5$, т.е.

$P(A+B)=1/3+1/5-1/15=7/15=0{,}467$

<u>Теорема умножения вероятностей:</u>

Теорема умножения вероятностей независимых событий. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий. Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

Пример 6. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Пусть A - появление белого шара из первой урны, а B - появление белого шара из второй урны. Очевидно, что события A и [redacted] независимы. Найдем $P(A) = 4/12 = 1/3$, $P(B) = 3/12 = 1/4$.

По формуле получим: $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = (1/3) \cdot (1/4) = 1/12 = 0{,}083$

Пример 7. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет наудачу одну за другой две детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Введем следующие обозначения: A - первая взятая деталь стандартная; B - вторая взятая деталь стандартная. Вероятность того, что первая деталь стандартная, составляет $P(A) = 8/12 = 2/3$. вероятность того, что вторая взятая деталь окажется стандартной при условии, что была стандартной первая деталь, т.е. условная вероятность события B , равна $P_A(B) = 7/11$.

Вероятность того, что обе детали окажутся стандартными, находим по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = (2/3) \cdot (7/11) = 14/33 = 0{,}424$$