КАК НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ

- **Таблица производных простых функций**
- **Правила дифференцирования**
- **Пошаговые примеры - как найти производную**
- **Продолжаем искать производные вместе**

Операция отыскания производной называется дифференцированием.

В результате решения задач об отыскании производных у самых простых (и не очень простых) функций по определению производной как предела отношения приращения к приращению аргумента появились таблица производных и точно определённые правила дифференцирования. Первыми на ниве нахождения производных потрудились Исаак Ньютон (1643-1727) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716).

Поэтому в наше время, чтобы найти производную любой функции, не надо вычислять упомянутый выше предел отношения приращения функции к приращению аргумента, а нужно лишь воспользоваться таблицей производных и правилами дифференцирования. Для нахождения производной подходит следующий алгоритм.

Чтобы найти производную*, надо выражение под знаком штриха* ***разобрать на составляющие простые функции*** *и определить, какими действиями* ***(произведение, сумма, частное)*** *связаны эти функции. Далее производные элементарных функций находим в таблице производных, а формулы производных произведения, суммы и частного - в правилах дифференцирования.* Таблица производных и правила дифференцирования даны после первых двух примеров.

Пример 1. Найти производную функции

$x + \sin x$.

Решение. Из правил дифференцирования выясняем, что производная суммы функций есть сумма производных функций, т. е.

$$(x + \sin x)' = x' + (\sin x)'.$$

Из таблицы производных выясняем, что производная "икса" равна единице, а производная синуса - косинусу. Подставляем эти значения в сумму производных и находим требуемую условием задачи производную:

$$(x + \sin x)' = x' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$$

Пример 2. Найти производную функции

$5-7x$.

Решение. Дифференцируем как производную суммы, в которой второе слагаемое с постоянным множителем, его можно вынести за знак производной:

$$(5-7x)'=5'+(-7)'=5'+(-7)x'=$$
$$=0+(-7)\bullet 1=-7.$$

Если пока возникают вопросы, откуда что берётся, они, как правило, проясняются после ознакомления с таблицей производных и простейшими правилами дифференцирования. К ним мы и переходим прямо сейчас.

Таблица производных простых функций

1. Производная константы (числа). Любого числа (1, 2, 5, 200...), которое есть в выражении функции. Всегда равна нулю. Это очень важно помнить, так как требуется очень часто	$C'=0$
2. Производная независимой переменной. Чаще всего "икса". Всегда равна единице. Это тоже важно запомнить надолго	$x'=1$
3. Производная степени. В степень при решении задач нужно преобразовывать неквадратные корни.	$(x^n)'=nx^{n-1}$
4. Производная переменной в степени -1	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
5. Производная квадратного корня	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. Производная синуса	$(\sin x)'=\cos x$

7. Производная косинуса	$(\cos x)' = -\sin x$
8. Производная тангенса	$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. Производная котангенса	$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. Производная арксинуса	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. Производная арккосинуса	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. Производная арктангенса	$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
13. Производная арккотангенса	$(\mathrm{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
14. Производная натурального логарифма	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
15. Производная логарифмической функции	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
16. Производная экспоненты	$(e^x)' = e^x$
17. Производная показательной функции	$(a^x)' = a^x \ln a$

Правила дифференцирования

1. Производная суммы или разности	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. Производная произведения	$(uv)' = u'v + v'u$
2a. Производная выражения, умноженного на постоянный множитель	$(Cu)' = Cu'$
3. Производная частного	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
4. Производная сложной функции	$(f[g(x)])' = f'[g(x)] \bullet g'(x)$

Правило 1. *Если функции*

$u = f(x)$,
$v = g(x)$

дифференцируемы в некоторой точке x_0*, то в той же точке дифференцируемы и функции*

$$u \pm v = f(x) \pm \varphi(x),$$

причём

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

т.е. производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций.

Следствие. *Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то их производные равны*, т.е.

$$(u + C)' = u'$$

Правило 2. *Если функции*

$$u = f(x)$$

и

$$v = g(x)$$

дифференцируемы в некоторой точке x_0*, то в то же точке дифференцируемо и их произведение*

$$u(x) \bullet v(x),$$

причём

$$(uv)' = u'v + uv'$$

т.е. производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$$(Cu)' = C \bullet u'$$

Следствие 2. *Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из сомножителей на все остальные.*

Например, для трёх множителей:

$$(uvw)' = u'vw + v'uw + w'uv$$

Правило 3. *Если функции*

$u = f(x)$

и

$v = g(x)$

дифференцируемы в некоторой точке x_0 *и* $v(x_0) \neq 0$ *, то в этой точке дифференцируемо и их частное u/v , причём*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$$

т.е. производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя.

Замечание. Следует не путать константу (то есть, число) как слагаемое в сумме и как постоянный множитель! В случае слагаемого её производная равна нулю, а в случае постоянного множителя она выносится за знак производных. Это типичная ошибка, которая встречается на начальном этапе изучения производных, но по мере решения уже нескольких одно- двухсоставных примеров средний студент этой ошибки уже не делает.

А если при дифференцировании произведения или частного у вас появилось слагаемое $u'v$, в котором u - число, например, 2 или 5, то есть константа, то производная этого числа будет равна нулю и, следовательно, всё слагаемое будет равно нулю (такой случай разобран в примере 10).

Пошаговые примеры - как найти производную

Пример 3. Найти производную функции

$$(x-5)(2x-5).$$

Решение. Определяем части выражения функции: всё выражение представляет произведение, а его сомножители - суммы, во второй из которых одно из слагаемых содержит постоянный множитель. Применяем правило дифференцирования произведения: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$\big((x-5)(2x-5)\big)' =$$
$$= (x-5)'(2x-5) + (x-5)(2x-5)'.$$

Далее применяем правило дифференцирования суммы: производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций. В нашем случае в каждой сумме второе слагаемое со знаком минус. В каждой сумме видим и независимую переменную, производная которой равна единице, и константу (число), производная которой равна нулю. Итак, "икс" у нас превращается в единицу, а минус 5 - в ноль. Во втором выражении "икс" умножен на 2, так что двойку умножаем на ту же единицу как производную "икса". Получаем следующие значения производных:

$$(x-5)'=x'-5'=1+0=1.$$

$$(2x-5)'=(2x)'-5'=2(x)'-0=2\bullet 1=2.$$

Подставляем найденные производные в сумму произведений и получаем требуемую условием задачи производную всей функции:

Пример 4. Найти производную функции

$$\frac{x-5}{2x-5}.$$

Решение. От нас требуется найти производную частного. Применяем формулу дифференцирования частного: производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя. Получаем:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)'=\frac{(x-5)'(2x-5)-(x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2}.$$

Производную сомножителей в числителе мы уже нашли в примере 2. Не забудем также, что произведение, являющееся вторым сомножителем в числителе в текущем примере берётся со знаком минус:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)'=\frac{(2x-5)-(2x-10)}{(2x-5)^2}=$$

$$=\frac{-5+10}{(2x-5)^2}=\frac{5}{(2x-5)^2}.$$

Пример 5. Найти производную функции

$$(2x-1)\sqrt{x}.$$

Решение. В данной функции видим произведение, один из сомножителей которых - квадратный корень из независимой переменной, с производной которого мы ознакомились в таблице производных. По правилу дифференцирования произведения и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left((2x-1)\sqrt{x}\right)'=(2x-1)'\sqrt{x}+(2x-1)\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=2\sqrt{x}+(2x-1)\bullet\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{2x-1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 6. Найти производную функции

$$\frac{\sqrt{x}}{2x+1}.$$

Решение. В данной функции видим частное, делимое которого - квадратный корень из независимой переменной. По правилу дифференцирования частного, которое мы повторили и применили в примере 4, и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+1}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'(2x+1)-\sqrt{x}\,(2x+1)'}{(2x+1)^2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)-\sqrt{x}\,(2)}{(2x+1)^2}=\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}.$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:

$$\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}=\frac{2x+1-\left(2\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2}.$$

Найти производные самостоятельно

Пример 7. Найти производную функции

$$y=3x^4-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y=\sqrt{x}\sin x\cos x.$$

Пример 9. Найти производную функции

$y = ax^2 + bx + c$, где a и b - константы

Пример 10. Найти производную функции

$y = 3e^x - 3^x$.

Пример 11. Найти производную функции

$y = \frac{4}{xe^x}$.

Продолжаем искать производные вместе

Пример 12. Найти производную функции

$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x$.

Решение. Применяя правила вычисления производной алгебраической суммы функций, вынесения постоянного множителя за знак производной и формулу производной степени (в таблице производных - под номером 3), получим

$$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' =$$
$$= (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' =$$
$$= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x') =$$
$$= 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

Пример 13. Найти производную функции

$y = (1 - x^3)(x^4 + 4x)$.

Решение. Применим правило дифференцирования произведения, а затем найдём производные сомножителей, так же, как в предыдущей задаче, пользуясь формулой 3 из таблицы производных. Тогда получим

$$y' = \left[(1 - x^3)(x^4 + 4x)\right]' =$$
$$= (1 - x^3)'(x^4 + 4x) + (x^4 + 4x)'(1 - x^3) =$$
$$= -3x^2(x^4 + 4x) + (4x^3 + 4)(1 - x^3) =$$
$$= -7x^6 - 12x^3 + 4.$$

Пример 14. Найти производную функции

$\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

Решение. Как и в примерах 4 и 6, применим правило дифференцирования частного:

$$y' = \frac{(1-x^2)(1+x^2)' - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}.$$

Теперь вычислим производные в числителе и перед нами уже требуемый результат:

$$y' = \frac{(1-x^2)2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Пример 15.Найти производную функции

$$y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2}.$$

Шаг1. Применяем правило дифференцирования суммы:

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{x}\right)' + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)' + \left(\sqrt{2}\right).$$

Шаг2. Найдём производную первого слагаемого. Это табличная производная квадратного корня (в таблице производных - номер 5):

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Шаг3. В частном знаменатель - также корень, только не квадратный. Поэтому преобразуем этот корень в степень:

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)'$$

и далее дифференцируем частное, не забывая, что число 2 в первом слагаемом числителя - это константа, производная которой равна нулю, и, следовательно всё первое слагаемое равно нулю:

$$\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \frac{(2)' x^{\frac{1}{3}} - 2\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{0 \bullet x^{\frac{1}{3}} - 2 \bullet \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= -\frac{2}{3} \bullet \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2}{3} \bullet x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3} \bullet x^{-1\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Корень из константы, как не трудно догадаться, является также константой, а производная константы, как мы знаем из таблицы производных, равна нулю:

$$\left(\sqrt{2}\right)' = 0,$$

а производная, требуемая в условии задачи:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$