Производная произведения и частного функции

Формулы производной произведения и частного функции

Формула производной произведения функции имеет вид $(uv)' = u'v + uv'$.

Формула производной частного функции имеет вид $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Однако было бы наивно надеяться, что на контрольной или экзамене Вам обязательно попадётся пример на нахождение производной такого частного: $y = \frac{1}{x-1}$, где легко подставить простенькое выражение в формулу и выдать правильное решение.

В реальных задачах требуется найти производную таких произведений и частных, в которые вкрались тригонометрические выражения и логарифмы, не говоря уже о множителях (константах), и вообще о том, что может содержать произведение или частное функции. Поэтому примеры нахождения производной произведения и частного функций вынесены в эту отдельную статью.

Пример 1. Найти производную функции

$z = 2t^2 \operatorname{tg} t$.

Решение. От нас требуется найти производную произведения функций. Прежде всего вынесем множитель 2 за знак производной:

$z = 2(t^2 \operatorname{tg} t)$.

Теперь применяем формулу дифференцирования произведения:

$$z' = 2\left((t^2)' \operatorname{tg} t + t^2 (\operatorname{tg} t)'\right) =$$

$$= 2\left(2t \bullet \operatorname{tg} t + t^2 \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$

$$= 2t\left(2\operatorname{tg} t + t \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right).$$

Приводим слагаемые в скобках к общему знаменателю:

$$2t\left(2\operatorname{tg} t + t \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$
$$= 2t\left(\frac{2\operatorname{tg} t \bullet \cos^2 t}{\cos^2 t} + t \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$
$$= 2t\left(\frac{\frac{2\sin t}{\cos t} \bullet \cos^2 t}{\cos^2 t} + t \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right) =$$
$$= 2t\left(\frac{2\sin t \bullet \cos t}{\cos^2 t} + t \bullet \frac{1}{\cos^2 t}\right).$$

В числителе первого слагаемого можно заметить знакомое по школьной математике выражение двойного угла:

$$2\sin t \bullet \cos t$$

Существует также известное из школьной математики тождество:

$$2\sin\alpha \bullet \cos\alpha = \sin 2\alpha.$$

Подставляем его в наш промежуточный результат и получаем:

$$2t\left(\frac{2\sin t \bullet \cos t}{\cos^2 x} + t \bullet \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= 2t\left(\frac{\sin 2t}{\cos^2 t} + \frac{t}{\cos^2 t}\right) =$$
$$= 2t\left(\frac{\sin 2t + t}{\cos^2 t}\right).$$

Производная данного произведения найдена.

Найти производную произведения функций самостоятельно.

Пример 2.Найти производную функции

$$y = x^2 \sin x.$$

Пример 3.Найти производную функции

$$y = \sqrt{x}\sin x\cos x$$

Производная суммы частных

Пример 4.Найти производную функции

$$y=\frac{3}{x}-\frac{x}{2}+\frac{\ln x}{2x}.$$

Решение. Перед нами сумма частных. Следовательно, каждое слагаемое будет дифференцировано как частное. Применяем правило дифференцирования частного, не забывая, чему равны производные числа(константы) и самой переменной *x*:

$$y'=\frac{3'x-3(x)'}{x^2}-\frac{(x)'2-x(2)'}{4}+$$

$$+\frac{(\ln x)'\bullet 2x-\ln x\bullet(2x)'}{4x^2}=$$

$$=\frac{-3}{x^2}-\frac{2}{4}+\frac{\frac{1}{x}\bullet 2x-\ln x\bullet 2}{4x^2}=$$

$$=-\frac{12}{4x^2}-\frac{2x^2}{4x^2}+\frac{2-2\ln x}{4x^2}=$$

$$=\frac{-12-2x^2+2-2\ln x}{4x^2}=$$

$$=\frac{-10-2\left(x^2-\ln x\right)}{4x^2}=\frac{-5-x^2-\ln x}{4x^2}=$$

$$=-\frac{5+x^2+\ln x}{2x^2}.$$

Пример 5.Найти производную функции

$$y=\frac{e^x\bullet\sin x}{1+\ln x}.$$

Шаг 1. Применим правило дифференцирования частного:

$$y'=\left(\frac{e^x\bullet\sin x}{1+\ln x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(e^x\bullet\sin x\right)'\bullet(1+\ln x)-e^x\bullet\sin x\bullet(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}.$$

Шаг 2. Находим производную произведения в числителе:

$$\left(e^x\bullet\sin x\right)'=\left(e^x\right)'\bullet\sin x+e^x\bullet(\sin x)'=$$

$$=e^x\bullet\sin x+e^x\bullet\cos x=e^x\bullet(\sin x+\cos x).$$

Шаг 3. Находим производную суммы:

$$(1+\ln x)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Шаг 4. Находим производную функции:

$$\frac{e^x \bullet (\sin x+\cos x)\bullet(1+\ln x)-\dfrac{e^x \bullet \sin x}{x}}{(1+\ln x)^2}.$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на *x*:

$$\frac{x\bullet\left(e^x \bullet (\sin x+\cos x)\bullet(1+\ln x)-\dfrac{e^x - \sin x}{x}\right)}{x\bullet(1+\ln x)^2}=$$

$$=\frac{xe^x(\sin x+\cos x)(1+\ln x)-e^x\sin x}{x(1+\ln x)^2}.$$

Найти производную частного функций самостоятельно.

Пример 6.Найти производную функции

$$y=\frac{x^3}{\cos x}.$$

Пример 7.Найти производную функции

$$y=\frac{\cos x}{7}$$

Продолжаем решать задачи вместе

Пример 8.Найти производную функции

$$y=\frac{2-x}{\sqrt{2}}\bullet \operatorname{arctg} x.$$

Шаг 1. Применим правило дифференцирования произведения:

$$y' = \left(\frac{2-x}{\sqrt{2}} \bullet \operatorname{arctg} x\right)' =$$
$$= \left(\frac{2-x}{\sqrt{2}}\right)' \bullet \operatorname{arctg} x + \frac{2-x}{\sqrt{2}} \bullet (\operatorname{arctg} x).$$

Шаг 2. Найдём производную частного, помня, что производная константы равна нулю, а корень из константы является также константой:

$$\left(\frac{2-x}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{(2-x)' \bullet \sqrt{2} + (2-x) \bullet \left(\sqrt{2}\right)'}{\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-(x)' \bullet \sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Шаг 3. Находим производную арктангенса (формула 12 в таблице производных):

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Искомая производная:

$$y' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \operatorname{arctg} x + \frac{2-x}{\sqrt{2}} \bullet \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \bullet \operatorname{arctg} x + \frac{2-x}{\sqrt{2} \bullet (1+x^2)}.$$

Пример 9.Найти производную функции

$$y = \frac{1}{3^x \sqrt{x}}.$$

Шаг 1. Применим правило дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{1}{3^x \bullet \sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \frac{(1)' \bullet 3^x \bullet \sqrt{x} - 1 \bullet \left(3^x \bullet \sqrt{x}\right)'}{\left(3^x \bullet \sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\left(3^x \bullet \sqrt{x}\right)'}{3^{2x} \bullet x}.$$

Шаг 2. Дифференцируем по правилам для произведения и показательной функции (формула 17 в таблице производных):

$$-\frac{\left(3^x \bullet \sqrt{x}\right)'}{3^{2x} \bullet x} = -\frac{\left(3^x\right)' \bullet \sqrt{x} + 3^x \bullet \left(\sqrt{x}\right)'}{3^{2x} \bullet x} =$$

$$= -\frac{3^x \ln 3 \bullet \sqrt{x} + 3^x \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}}}{3^{2x} \bullet x} =$$

$$= -\frac{3^x \bullet \left(\ln 3 \bullet \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{3^{2x} \bullet x} =$$

$$= -\frac{\ln 3 \bullet \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{3^x \bullet x}.$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:

$$y' = -\frac{2\sqrt{x}\left(\ln 3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{3^x \bullet 2x\sqrt{x}} = -\frac{2x\ln 3 + 1}{3^x 2x\sqrt{x}}.$$