

Асимптоты графика функции

Виды асимптот

Определение

Прямая $x=x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Прямая $x=x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке $x=x_0$. Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.

Определение

Прямая $y=y_0$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ равно y_0 .

Замечание. График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую.

Определение

Прямая $y=kx+b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0$.

Нахождение наклонной асимптоты

Теорема

(условиях существования наклонной асимптоты)

Если для функции $y=f(x)$ существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$, то функция имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x \rightarrow \infty$.

Замечание

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k=0$.

Замечание

Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, то функция может иметь наклонную асимптоту.

Замечание

Кривая $y=f(x)$ может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.

Пример

Задание. Найти асимптоты графика функции $y(x) = x^2 - 3x + 2x + 1$

Решение. Область определения функции:

$$D[f]: x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty) \quad D[f]: x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

а) вертикальные асимптоты: прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \rightarrow -1} y(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 3x + 2x + 1 [60] = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -1} y(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 3x + 2x + 1 [60] = \infty$$

б) горизонтальные асимптоты: находим [предел функции на бесконечности](#):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x + 2x + 1 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x + 2x + 1 = \infty$$

то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты $y = kx + b$ $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2x + 1}{x} = 1 \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2x + 1}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 - 3x + 2x + 1 - x] = b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 - 3x + 2x + 1 - x] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x + 2 - x^2 - xx + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} -4x + 2x + 1 = -4 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3x + 2 - x^2 - xx + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} -4x + 2x + 1 = -4$$

Таким образом, наклонная асимптота: $y = x - 4$ $y = x - 4$.

Ответ. Вертикальная асимптота - прямая $x = -1$ $x = -1$.

Наклонная асимптота - прямая $y = x - 4$ $y = x - 4$.

Исследование функции и построение ее графика

При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика имеет следующую структуру:

1. Область определения $D(y)$ $D(y)$ и область допустимых значений $E(y)$ $E(y)$ функции.
2. Четность, нечетность функции.
3. Точки пересечения с осями.
4. Асимптоты функции.
5. Экстремумы и интервалы монотонности.
6. Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости.
7. Сводная таблица.

Замечание

Схема представлена как примерная. Пункты исследования можно опускать, если они дают банальную информацию, или переставлять, если обнаруживаются интересные особенности поведения графика.

Замечание

Для уточнения графика можно найти некоторые дополнительные точки, но иногда удается обойтись и без них.

Замечание

Рекомендуется строить график одновременно с исследованием функции, нанося на координатную плоскость информацию по завершении каждого пункта исследования.

Пример

Задание. Исследовать функцию $y(x) = x^2 - x - 1x^2 - 2x$ $y(x) = x^2 - x - 1x^2 - 2x$ и построить ее график.

Решение. 1) Область определения функции.

$$D(y): x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 2 \Rightarrow D(y): x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 0, x_2 \neq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$$

2) Четность, нечетность.

$$y(-x) = (-x)^2 - (-x) - 1(-x)^2 - 2(-x) = x^2 + x - 1x^2 + 2x \neq y(x) - y(x) \quad y(-x) = (-x)^2 - (-x) - 1(-x)^2 - 2(-x) = x^2 + x - 1x^2 + 2x$$

$$\neq y(x) - y(x)$$

Функция общего вида.

3) Точки пересечения с осями.

а) с осью $Ox: y=0$:

$$x^2 - x - 1x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 = 1 + 5\sqrt{2}, x_2 = 1 - 5\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 1 + 52, x_2 = 1 - 52$$

то есть точки $A_1(1+5\sqrt{2}; 0), A_2(1-5\sqrt{2}; 0), A_1(1+52; 0), A_2(1-52; 0)$

б) с осью $Oy: x=0$: в данной точке функция неопределенна.

4) Асимптоты.

а) вертикальные: прямые $x=0$ и $x=2$ - вертикальные асимптоты.

б) горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x - 1x^2 - 2x = 1 \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x - 1x^2 - 2x = 1$$

то есть прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.

в) наклонные асимптоты $y=kx+b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 1x^2 - 2x}{x} = 0, k = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x - 1x^2 - 2x = 0$$

Таким образом, наклонных асимптот нет.

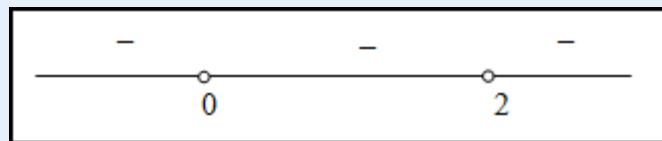
5) Критические точки функции, интервалы возрастания, убывания.

$$y' = (x^2 - x - 1x^2 - 2x)' = (2x - 1)(x^2 - 2x) - (x^2 - x - 1)(2x - 2) = y' = (x^2 - x - 1x^2 - 2x)' = (2x - 1)(x^2 - 2x) - (x^2 - x - 1)(2x - 2) = \\ = (2x - 1)(x^2 - 2x) - (x^2 - x - 1)(2x - 2) =$$

$$= 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - (2x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2)(x^2 - 2x) = 2x^3 - 4x^2 - x^2 + 2x - (2x^3 - 2x^2 - 2x^2 + 2x - 2x + 2)(x^2 - 2x) =$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 2x - 2x^3 + 4x^2 - 2(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x - 2(x^2 - 2x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 2x^3 + 4x^2 - 2(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x - 2(x^2 - 2x)$$

Найдем точки, в которых первая производная равна нулю или не существует: $y' \neq 0$ для любого x из области определения функции; y' не существует при $x_1=0$ и $x_2=2$.



Таким образом, функция убывает на всей области существования. Точек экстремума нет.

6) Точки перегиба, интервалы выпуклости, вогнутости.

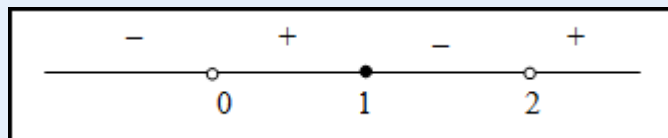
$$y'' = (y')' = (-x^2 + 2x - 2(x^2 - 2x))' = y'' = (y')' = (-x^2 + 2x - 2(x^2 - 2x))' = \\ = (-2x + 2)(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x^2 - 2x) = (-2x + 2)(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x^2 - 2x) =$$

$$= (-2x + 2)(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x^2 - 2x) = (-2x + 2)(x^2 - 2x) - (-x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x^2 - 2x) =$$

$$= -2x^3 + 6x^2 - 4x + 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8(x^2 - 2x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8(x^2 - 2x) =$$

$$= 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8(x^2 - 2x) = 2x^3 - 6x^2 + 12x - 8(x^2 - 2x)$$

Найдем точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует: $y''=0: x=1$; при $x=0$ и $x=2$ вторая производная не существует.



Таким образом, на промежутках $(0; 1)$ и $(2; +\infty)$ функция вогнута, а на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(1; 2)$ - выпукла. Так как при переходе через точку $x=1$ вторая производная поменяла знак, то эта точка является точкой перегиба.

7) Эскиз графика.

