# Таблица производных

Дифференцирование функций «с нуля», т. е. исходя из определения производной и теории пределов – вещи достаточно трудоёмкая. Поэтому математики вычислили производные элементарных функций. Получилась таблица производных, где всё уже готово.

**Производные некоторых элементарных функций:**

1. $c' = 0, \quad c = \text{const}$

2. $x' = 1$

3. $(kx + m)' = k$

4. $(x^2)' = 2x$

5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

6. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

# Доказательство формулы (√x)'=1/(2√x)

Дано: $f(x) = \sqrt{x}; x > 0$

Доказать: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

*Доказательство*

Изобразим график функции: $f(x) = \sqrt{x}$ (см. Рис. 1). Зафиксируем точку $x_0$ и приращение аргумента $\Delta x$. Получаем новое значение аргумента $x_0 + \Delta x$ и, соответственно, новое значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. То есть при переходе от значения аргумента $x_0$ к $x_0 + \Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0 + \Delta x)$. Значение функции в новой точке равно $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$.

Получили прямоугольный треугольник (выделен красным цветом), катетами которого являются два приращения – приращение аргумента ($\Delta x$) и приращение функции ($\Delta f$ – разность между значением функции в новой точке и значением функции в старой точке).

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$$

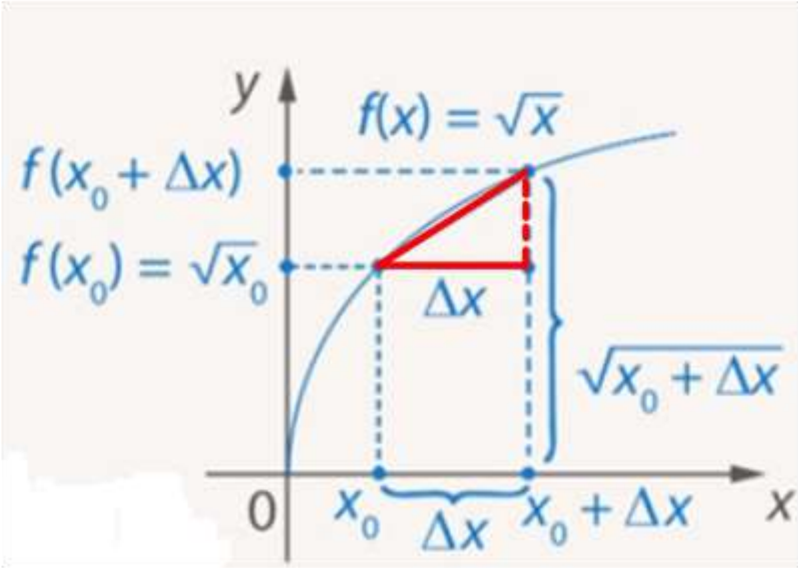


Рис. 1. Иллюстрация к доказательству

Найдём отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}$$

В числителе получили выражение разности квадратов:

$$\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right) = \left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2 = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$$

Следовательно:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Проанализируем данное выражение при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$x_0$ – произвольное допустимое число, поэтому:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Что и требовалось доказать.

## Задача 1

Дано: $f(x) = \sqrt{x}$

Найти: $f'(4)$

Решение

1. Найдём производную в любой точке $x$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Найдём производную в заданной точке:

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Как известно, это значение является тангенсом угла наклона касательной к кривой $y = \sqrt{x}$, проведённой в точке с абсциссой 4 (см. Рис. 2):

$$f'(4) = \frac{1}{4} = \operatorname{tg}\alpha$$

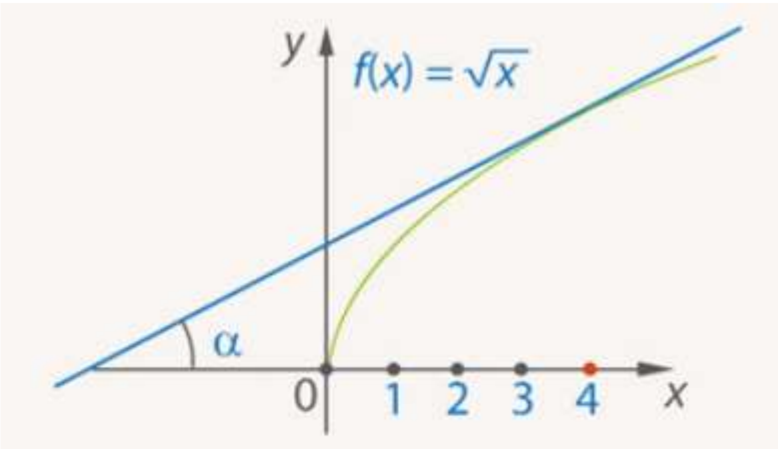


Рис. 2. Иллюстрация к задаче

Ответ: $f'(4) = \frac{1}{4}$

## Доказательство формулы (sinx )'=cosx

Дано: $y = \sin x$

Доказать: $(\sin x)' = \cos x$

*Доказательство*

На рисунке 3 показано, каким образом ведёт себя функция $y = \sin x$. Зафиксируем точку $x$ и приращение аргумента $\Delta x$. Получаем новое значение аргумента (новую точку) $x + \Delta x$. При переходе от значения аргумента $x$ к $x + \Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $y = \sin x$ до $y = \sin(x + \Delta x)$.

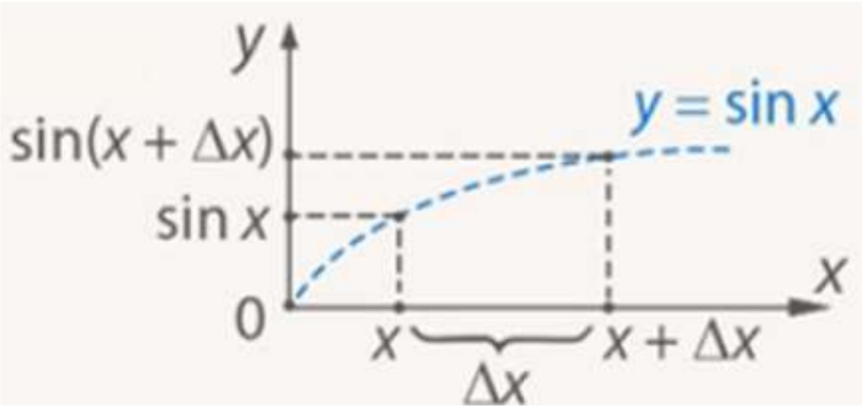


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству

Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Для упрощения этого выражения используем формулу разности синусов:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

При $\Delta x \to 0$:

$$\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$$

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$$

Объясним это, рассмотрев тригонометрический круг с радиусом 1 и угол, равный $\frac{\Delta x}{2}$ (см. Рис. 4). Нам необходимо найти длину дуги $\overset{\frown}{MAN}$ и длину хорды $MN$.

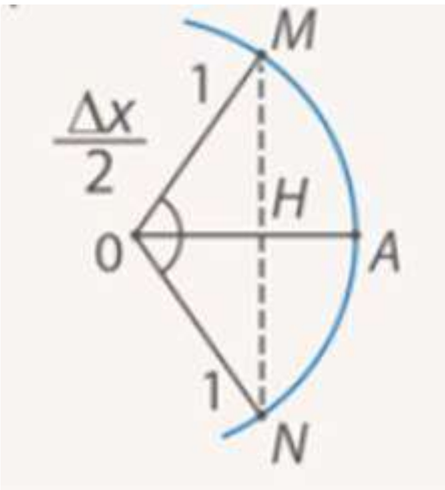


Рис. 4. Иллюстрация к доказательству

Длина дуги равна произведению радиуса на центральный угол:

$l_\alpha = R \cdot \alpha$

Радиус равен 1, поэтому длина дуги численно равна центральному углу, который равен $\Delta x$. Следовательно:

$\overset{\frown}{MAN} = \Delta x$

Хорда $MN$ состоит из двух катетов треугольников $NOH$ и $MOH$, которые равны произведению гипотенузы (единица, так как это радиус) на синус противолежащего угла. Следовательно:

$MN = 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$

При $\Delta x \to 0$ длина дуги стремится к длине хорды:

$\overset{\frown}{MAN} \to MN$

То есть при маленьком угле дуга и хорда по длине неразличимы.

Таким образом, домножив выражение $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ на 2, получаем выражение $\frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}}$, которое есть отношение длины хорды к длине дуги:

$$\frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{MN}{\overset{\frown}{MAN}}$$

Но так как $\overset{\frown}{MAN} \to MN$, то:

$$\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1$$

Следовательно, при $\Delta x\to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1\cdot\cos x$$

Поэтому:

$$(\sin x)'=\cos x$$

Что и требовалось доказать.

## Задача 2

Дано: $f(x)=\sin x$

Найти: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

*Решение*

1. Найдём производную в любой точке $x$:

$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$$

2. Найдём производную в заданной точке:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Задача 3

Дано: $f(x)=\sin x$

Найти: тангенс угла наклона касательной к кривой $f(x)=\sin x$ в точках: а) $x_0=\frac{\pi}{4}$; б) $x_0=0$; в) $x_0=\frac{\pi}{2}$

*Решение*

На рисунке 5 показана иллюстрация к задаче. Изображена синусоида, к точке кривой с абсциссой $\frac{\pi}{4}$ проведена касательная, которая образует угол $\alpha$ с осью $x$. Тангенс данного угла необходимо найти. Также необходимо найти тангенс угла, который образовывается при пересечении оси абсцисс с касательной, проведённой к точке кривой с абсциссой 0 и $\frac{\pi}{2}$.

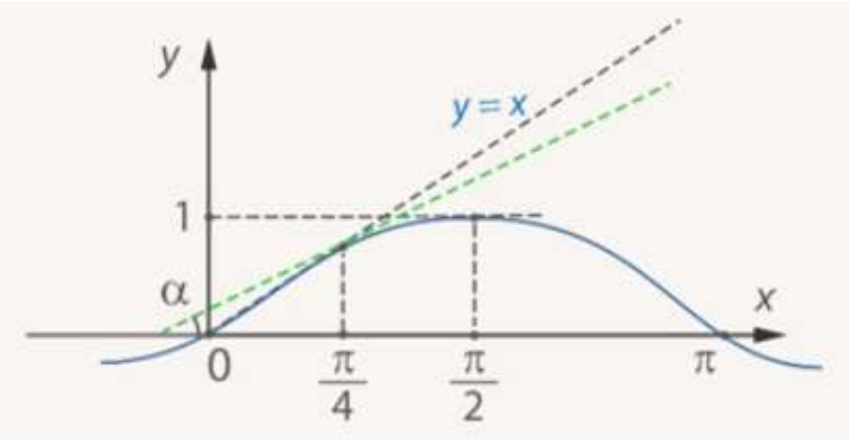


Рис. 5. Иллюстрация к задаче

Так как $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, то:

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \operatorname{tg}\alpha$$

а) Для точки $x_0 = \frac{\pi}{4}$ тангенс угла наклона касательной будет равен:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)' = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) Для точки $x_0 = 0$ тангенс угла наклона касательной будет равен:

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos 0 = 1$$

Следовательно, прямая $y = x$, изображённая на рисунке 5, является касательной к синусоиде в точке 0.

в) Для точки $x_0 = \frac{\pi}{2}$, тангенс угла наклона касательной будет равен:

$$\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Следовательно, в этом случае касательная параллельна оси $x$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

**Домашнее задание**

1. Доказать формулу производной $(\cos x)' = -\sin x$.
2. Доказать формулу производной $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
3. Найти производную функции $y = \cos 2x$.

**Дополнительные рекомендованные ссылки на ресурсы сети Интернет**

1. Интернет-портал Webmath.ru (Источник).
2. Интернет-портал Youtube.com (Источник).
3. Интернет-портал Cleverstudents.ru (Источник).