Понятие производной

Производная - главнейшее понятие математического анализа. Она характеризует изменение функции аргумента *x* в некоторой точке. При этом и сама производная является функцией от аргумента *x*

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

То есть,

$$f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Наиболее употребительны следующие ***обозначения производной***:

$$y`;\ f`(x);\ \frac{dy}{dx};\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Пример 1. Пользуясь **определением производной**, найти производную функции

$$y = \sqrt{x+1}.$$

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема её вычисления.

Дадим аргументу приращение (дельта) и найдём приращение функции:

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}.$$

Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{x+\Delta x+1-(x+1)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}.$$

Вычислим предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то есть требуемую в условии задачи производную:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

Физический смысл производной

К ***понятию производной*** привело изучение Галилео Галилеем закона свободного падения тел, а в более широком смысле - задачи о мгновенной скорости неравномерного прямолинейного движения точки.

Пусть камешек поднят и затем из состояния покоя отпущен. Путь *s*, проходимый за время *t*, является функцией времени, то есть. *s* = *s*(*t*). Если задан закон движения точки, то можно определить среднюю скорость за любой промежуток времени. Пусть в момент времени $t_1=t$ камешек находился в положении *A*, а в момент $t_2=t+\Delta t$ - в положении *B*. За промежуток времени Δt (от *t* до $t+\Delta t$) точка прошла путь $|AB|=s(t+\Delta t)-s(t)=\Delta s$. Поэтому средняя скорость движения за этот промежуток времени, которую обзначим через $v_{\Delta t}$, составляет

$$v_{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Однако движение свободно падающего тела явно неравномерное.
Скорость *v* падения постоянно возрастает. И средней скорости уже недостаточно для характеристики быстроты движения на различных участках пути. Такая характеристика тем точнее, чем меньше промежуток времени Δt. Поэтому вводится следующее понятие: мгновенной скоростью прямолинейного движения (или скоростью в данный момент времени *t*) называется предел средней скорости при $\Delta t\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

(при условии, что этот предел существует и конечен).

Так выясняется, что мгновенная скорость есть предел отношения приращения функции *s*(*t*) к приращению аргумента *t* при $\Delta t\to 0$ Это и есть производная, которая в общем виде записывается так:.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Решение обозначенной задачи представляет собой ***физический смысл производной***. Итак, производной функции *y*=*f*(*x*) в точке *x* называется предел (если он существует и конечен) приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Пример 2. Найти производную функции

$$y = f(x) = 2x^2 + 1.$$

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема для её вычисления.

Шаг 1. Дадим аргументу приращение Δx и найдём

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 + 1 =$$
$$= 2x^2 + 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1.$$

Шаг 2. Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= \left[2x^2 + 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1\right] - \left(2x^2 + 1\right) =$$
$$= 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Шаг 3. Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= 4x + 2\Delta x.$$

Шаг 4. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то есть производную:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(4x + 2\Delta x) = 4x.$$

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и пусть точка *M* на графике функции соответствует значению аргумента x_0, а точка *P* – значению $x_0 + \Delta x$. Проведём через точки *M* и *P* прямую и назовём её *секущей*. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол между секущей и осью Ox. Очевидно, что этот угол зависит от Δx.

Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0,$$

то **прямую с угловым коэффициентом**

$k = tg\ \varphi_0$

проходящую через точку $M(x_0; f(x_0))$, называют предельным положением секущей *MP* при $\Delta x \to 0$ (или при $P \to M$).

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке *M* называется предельное положение секущей *MP* при $\Delta x \to 0$, или, что то же при $P \to M$.

Из определения следует, что для существования касательной достаточно, чтобы существовал предел

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$,

причём предел φ_0 равен углу наклона касательной к оси Ox.

Теперь дадим точное определение касательной.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f`(x_0)$, т.е. прямая, уравнение которой

$y - f(x_0) = f`(x_0)(x - x_0).$

Из этого определения следует, что ***производная функции*** $y = f(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой *x*. В этом состоит геометрический смысл производной:

$f`(x) = k = tg\ \varphi,$

где φ - угол наклона касательной к оси абсцисс, т.е. угловой коэффициент касательной.

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ и значение этой производной при $x = 9$.

Решение. Воспользуемся схемой, приведённой в примере 1.

Шаг 1.

$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}.$

Шаг 2.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$

Шаг 3.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Шаг 4.

$$y` = f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Выражение под знаком предела не определено при $\Delta x = 0$ (неопределённость вида 0/0), поэтому преобразуем его, избавившись от иррациональности в числителе и затем сократив дробь:

$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Найдём значение производной при $x = 9$:

$$y`_{x=9} = f`(9) = 1/(2\sqrt{9}) = 1/6.$$