ЛЕКЦИЯ 1 декабря

Монотонность функции и ее связь с производной

Монотонность функции, основные понятия и определения

Определение

Функция $y=f(x)$ называется **строго возрастающей на промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е.

$$f(x)\uparrow: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Пример

Функция $y=x^2$ является возрастающей на промежутке $[0;1]$, так как:

$$\text{для } 0<1: f(0)=0^2=0<f(1)=1^2=1$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго убывающей на промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, т.е.

$$f(x)\downarrow: x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Пример

Функция $y=x^2$ является строго убывающей на промежутке $[-1;0]$, так как:

$$\text{для } -1<0: f(-1)=(-1)^2=1>f(0)=0^2=0$$

Функция $y=f(x)$ строго возрастающая или строго убывающая на промежутке называется **монотонной** на этом промежутке.

Определение

Функция $y=f(x)$ называется **неубывающей на промежутке**, если из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$.

Функция $y=f(x)$ называется **невозрастающей на промежутке**, если из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)\ge f(x_2)$.

Связь монотонности функции с ее производной

Теорема

(Об условии возрастания/убывания монотонной функции)

Если производная функции $f'(x)>0$ на некотором промежутке X, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом промежутке; если же $f'(x)<0$ на промежутке X, то функция $y=f(x)$ убывает на этом промежутке.

Замечание

Обратное утверждение формулируется несколько иначе. Если функция возрастает на промежутке, то $f'(x_0)\ge 0$ или не существует.

Пример

Задание. Исследовать функцию $y=x^3$ на монотонность на всей числовой прямой.
Решение. Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x^3)'=3x^2$$

Для любого действительного x: $y'(x)=3x^2\geq 0$, а поэтому делаем вывод, что заданная функция возрастает на всей действительной оси.
Ответ. Функция $y=x^3$ возрастает на всей действительной оси .

Понятие экстремума функции

Определение

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x)\leq f(x_0)$.
Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности $f(x)\geq f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума называется **локальным максимумом**, значение функции в точке минимума - **локальным минимумом** данной функции. Локальные максимум и минимум функции называются **локальными экстремумами**.

Точка x_0 называется точкой **строгого локального максимума** функции $y=f(x)$, если для всех x из окрестности этой точки будет справедливо строгое неравенство $f(x)<f(x_0)$.
Точка x_0 называется точкой **строгого локального минимума** функции $y=f(x)$, если для всех x из окрестности этой точки будет справедливо строгое неравенство $f(x)>f(x_0)$.
Наибольшее или наименьшее значение функции на промежутке называется **глобальным экстремумом**.

Замечание

Глобальный экстремум может достигаться либо в точках локального экстремума, либо на концах отрезка.

Необходимое условие экстремума

Теорема

(Необходимое условие экстремума)

Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: $f'(x)=0$, называются **стационарными точками функции**.
Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются **критическими точками** этой функции. То есть **критические точки** - это либо стационарные точки (решения уравнения $f'(x)=0$), либо это точки, в которых производная $f'(x)$ не существует.

Замечание

Не в каждой своей критической точке функция обязательно имеет максимум или минимум.

Первое достаточное условие экстремума

Теорема

(Первое достаточное условие экстремума)

Пусть для функции $y=f(x)$ выполнены следующие условия:

1. функция непрерывна в окрестности точки x_0;
2. $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует;
3. производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак.

Тогда в точке $x=x_0$ функция $y=f(x)$ имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса на минус.

Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то экстремума в точке $x=x_0$ нет.
Таким образом, для того чтобы исследовать функцию $y=f(x)$ на экстремум, необходимо:

1. найти производную $f'(x)$;
2. найти критические точки, то есть такие значения x, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует;
3. исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки;
4. найти значение функции в экстремальных точках.

Пример

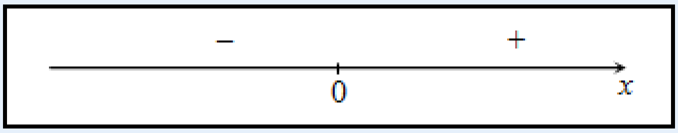
Задание. Исследовать функцию $y(x)=x^4-1$ на экстремум.
Решение. Находим производную заданной функции:

$$y'=(x^4-1)'=4x^3$$

Далее ищем критические точки функции, для этого решаем уравнение $y'(x)=0$:

$$y'=4x^3=0 \Rightarrow x=0$$

Первая производная определена во всех точках. Таким образом, имеем одну критическую точку $x=0$. Наносим эту точку на координатную прямую и исследуем знак производной слева и справа от этой точки (для этого из каждого промежутка берем произвольное значение и находим значение производной в выбранной точке, определяем знак полученной величины):



Так как при переходе через точку $x=0$ производная сменила свой знак с "-" на "+", то в этой точке функция достигает минимума (или минимального значения), причем $y_{min}=y(0)=0^4-1=-1$.
Замечание. Также можно определить интервалы монотонности функции: так как на интервале $(-\infty;0)$ производная $y'(x)<0$, то на этом интервале функция $y(x)=x^4-1$ является убывающей; на интервале $(0;+\infty)$ производная $y'(x)>0$, значит заданная функция возрастает на нем.
Ответ. $y_{min}=y(0)=-1$

Второе достаточное условие экстремума

Теорема

(Второе достаточное условие экстремума)

Пусть для функции $y=f(x)$ выполнены следующие условия:

1. она непрерывна в окрестности точки x_0;
2. первая производная $f'(x)=0$ в точке x_0;
3. $f''(x)\neq 0$ в точке x_0 .

Тогда в точке x_0 достигается экстремум, причем, если $f''(x_0)>0$, то в точке $x=x_0$ функция $y=f(x)$ имеет минимум; если $f''(x_0)<0$, то в точке $x=x_0$ функция $y=f(x)$ достигает максимум.

Пример

Задание. Исследовать функцию $y(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ на экстремум с помощью второй производной.

Решение. Находим первую производную заданной функции:

$$y'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Находим точки, в которых первая производная равна нулю:

$$y'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow x=0$$

Вторая производная заданной функции:

$$y''(x)=\left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=$$
$$=-\frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

В стационарной точке $x=0$ вторая производная $y''(0)=-\frac{4\cdot(-1)}{1^3}=4>0$, а значит, в этой точке функция достигает минимум, причем $y_{\min}=y(0)=\frac{0^2-1}{0^2+1}=-1$.

Ответ. $y_{\min}=y(0)=-1$