

Лекция

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Физические задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

А) Общие сведения о дифференциальных уравнениях

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются **дифференциальными** (термин принадлежит Г. Лейбницу, 1676 г.).

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Так, решением уравнения $y' = f(x)$ является функция $y = F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые общие сведения о дифференциальных уравнениях (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае — *ДУ в частных производных*. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ — обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2y' + 5xy = y^2$ — первого порядка; $yx'z'_x = xz'_y$ — ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ — *интегральной кривой*.

Рассмотрим некоторые задачи, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.

б) Задачи, приводящие к ДУ

Задача 1 Материальная точка массы m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V . Найти зависимость скорости от времени.

Решение: Примем за независимую переменную время t , отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией t , т. е. $V = V(t)$. Для нахождения $V(t)$ воспользуемся вторым законом Ньютона (основным законом механики): $m \cdot a = F$, где $a = V'(t)$ — есть ускорение движущегося тела, F — результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = -kV^2$, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V = V(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$m \cdot V' = -k \cdot V^2 \quad \text{или} \quad V' = -\frac{k}{m} \cdot V^2,$$

здесь m — масса тела.

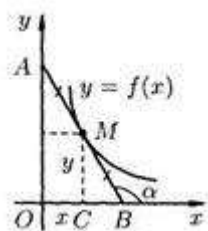
Как будет показано ниже (пример 5),

$$V = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + c},$$

где $const$.

Задача 2. Найти кривую, проходящую через точку (4; 1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат.

Найти кривую, проходящую через точку (4; 1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.



Решение: Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка кривой, уравнение которой $y = f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (рис. 1).

Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $\operatorname{tg} \alpha$ есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x; y)$ он равен y' , т.е. $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC) = MC/MB$. Но $\operatorname{tg}(\angle MBC) = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $MC = y$. По условию задачи $AM = MB$, следовательно, $OC = CB = x$.

Таким образом, получаем $-\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$ или $y' = \frac{y}{x}$. Решением полученного

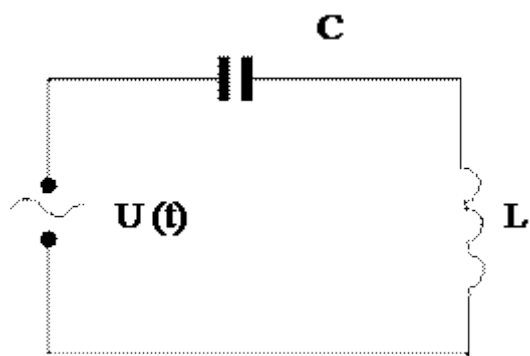
дифференциального уравнения является функция $y = \frac{4}{x}$ (гипербола).
Решение будет приведено в примере 4.

Задача 3. Найти изменение заряда конденсатора, пластины которого замкнуты через индуктивность

Найти изменение заряда конденсатора, пластины которого замкнуты через индуктивность.

Решение: По замкнутой электрической цепи, которая состоит из катушки индуктивности с самоиндукцией L и конденсатора с ёмкостью C , протекает переменный во времени ток $i(t)$. Если в какой-то момент времени на конденсаторе

имеется заряд q , то потенциал U , создаваемый этим зарядом, равен $\frac{q}{C}$.



Пусть в этот момент времени в цепи идёт ток силой i . На катушке индуктивности

он создаёт потенциал $L \frac{di}{dt}$. Теперь запишем условие равенства нулю суммы всех потенциалов в замкнутой цепи (так называемое второе уравнение Кирхгофа):

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Продифференцировав это равенство и учитывая, что $\frac{dq}{dt} = i$ (ток равен заряду, протекающему в единицу времени), мы получим

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Мы можем сразу написать функцию $i(t)$, удовлетворяющую данному уравнению

$$i(t) = C_1 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + C_2 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

ДРУГИЕ ЗАДАЧИ.

Можно показать, что:

- закон изменения массы радия в зависимости от времени («радиоактивный распад») описывается дифференциальным уравнением $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$,

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $m(t)$ — масса радия в момент t ;

- «закон охлаждения тел», т. е. закон изменения температуры тела в зависимости

от времени, описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - t_0)$,

где $T(t)$ — температура тела в момент времени t , k — коэффициент пропорциональности, t_0 — температура воздуха (среды охлаждения) ;

- зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от

времени t во многих случаях описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = k \cdot x$,

где k — коэффициент пропорциональности;

- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t = k \cdot m$, где $k > 0$;

- закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря

описывается уравнением $\frac{dp}{dh} = -k \cdot p$, где $p(h)$ — атмосферное давление воздуха на высоте h , $k > 0$.

Уже приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

Лекция (9 декабря)

Основные понятия

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \quad (1)$$

Уравнение связывает независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' . Если уравнение (1) можно разрешить относительно y' , то его записывают в виде

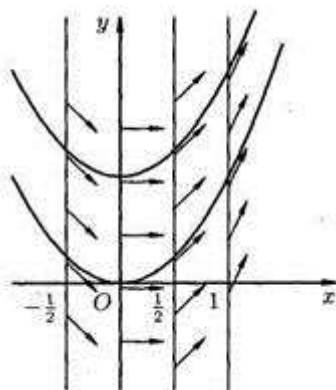
$$y' = f(x; y) \quad (2)$$

и называют ДУ первого порядка, разрешенным относительно производной. Мы в основном будем рассматривать эту форму записи ДУ.

Замечание. Уравнение (2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки $(x; y)$ и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y' = f(x; y)$ дает совокупность направлений (*поле направлений*) на плоскости Oxy . Такого геометрического истолкование ДУ первого порядка.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется *изоклиной*. Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклины можно получить, если положить $y' = c$, т. е. $f(x; y) = c$.

Пример 1. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.



Решение: Уравнение изоклин этого ДУ будет $2x = c$, т. е. изоклинами здесь будут прямые, параллельные оси Оу ($x = c/2$).

В точках прямых проведем отрезки, образующие с осью Ох один и тот же угол α , тангенс которого равен c .

Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = 1/2$, поэтому $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\alpha = 45^\circ$;

при $c = -1$: $x = -1/2$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$ и $\alpha = -45^\circ$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$ и $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ$ и т. д.

Построив четыре изоклины и отметив на каждой из них ряд стрелочек, наклоненных к оси Ох под определенным углом (рис. 2), по их направлениям строим линии. Они, как видно, представляют собой семейство парабол.

Итак, решение задач 1, 2, 3 привело нас к понятию дифференциального уравнения.

Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения 1 – го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \quad (3)$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ — известные функции. Уравнение (3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой. Отметим, что от одного вида записи ДУ можно перейти к другому.

Интегрирование ДУ в общем случае приводит к бесконечному множеству решений (отличающихся друг от друга постоянными величинами). Легко догадаться, что решением уравнения $y' = 2x$ является функция $y = x^2$, а также $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - \ln 2$ и вообще $y = x^2 + c$, где $c = \text{const}$.

Чтобы решение ДУ приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , т.е. $y = y_0$ называется *начальным условием*. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y|_{x=x_0} = y_0. \quad (4)$$

Теорема Коши (существования и единственности решения для ДУ 1 порядка). Если в уравнении (2) функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D , содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение $y = j(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию (4).

(Без доказательства).

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Итак, теорема Коши определяет существование единственного решения дифференциального уравнения первого порядка.

Общее, частное, особое решения

Рассмотрим уравнение (1) первого порядка в нормальной форме $y' = f(x, y)$, правая часть которого $f(x, y)$ удовлетворяет в некоторой области D условиям теоремы существования и единственности решения.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = j(x; c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $j(x; c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c .
2. Каково бы ни было начальное условие (4), можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = j(x; c)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = j(x; c_0)$, полученная из общего решения $y = j(x; c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. в виде уравнения $\Phi(x; y; c) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* ДУ. Уравнение $\Phi(x; y; c_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

С геометрической точки зрения $y = j(x, c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy ; частное решение $y = j(x; c_0)$ — одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задач Коши, будем называть **особым решением**. В этих точках терпит разрыв или функция $f(x, y)$, или её частная производная $f'_x(x, y)$. Через каждую из таких точек может проходить либо несколько кривых, либо не проходит ни одной.

Пример: Рассмотрим уравнение $y' = \frac{y}{x}$. Здесь $f(x, y) = \frac{y}{x}$ — имеет разрыв при $x = 0$ и непрерывна для всех $x \neq 0$.

Во всей плоскости OXY , за исключением оси OY , правая часть уравнения удовлетворяет условиям теоремы Коши. Точки, лежащие на оси OY , являются особыми. Общее решение этого уравнения $y = cx$. Оно геометрически представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через начало координат, за исключением оси OY . Через каждую точку, не лежащую на оси OY , проходит единственная прямая. Через начало координат проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Нарушение единственности объясняется тем, что начало координат является особой точкой. Через точки, лежащие на оси OY и не совпадающие с началом координат, не проходит ни одной интегральной кривой.

Особое решение, вообще говоря, не содержится в общем решении и не может быть выделено из него ни при каком конкретном значении постоянной c .

Итак, дифференциальное уравнение может иметь общее, частное и особое решение.

Задача Коши

Рассмотренные в п.1 примеры позволяют сделать выводы, которые справедливы и для других дифференциальных уравнений первого порядка:

1) дифференциальному уравнению (1) соответствует бесчисленное множество решений, следовательно, бесчисленное множество интегральных кривых;

2) для выделения из этого множества конкретной интегральной кривой надо задать точку $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить кривая.

Задача отыскания решения ДУ первого порядка (3), удовлетворяющего заданному начальному условию (4), называется **задачей Коши**.

Итак, задача, в которой требуется найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию (4), называется задачей Коши.