ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

Цель :Научиться решать дифференциальные уравнения методом разделения переменных.

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

Решение: по условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение. В уравнении нет переменной «икс», но это не должно смущать, главное, в нём есть первая производная.

Переписываем производную в нужном виде:

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

Очевидно, что переменные можно разделить, мальчики – налево, девочки – направо:

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

Общий интеграл получен. Здесь константу я нарисовал с надстрочной звездочкой, дело в том, что очень скоро она превратится в другую константу.

Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем старое, доброе, школьное: $\ln a = b \Rightarrow a = e^b$. В данном случае:

$$|y| = e^{-2x+C^*}$$

Константа в показателе смотрится как-то некошерно, поэтому её обычно спускают с небес на землю. Если подробно, то происходит это так. Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:

$$|y| = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Если C^* – это константа, то $e^{C^*} > 0$ – тоже некоторая константа, переобозначим её буквой C:

$y = Ce^{-2x}$ – при этом модуль убираем, после чего константа «цэ» сможет принимать как положительные, так и отрицательные значения

Запомните «снос» константы – это **второй технический приём**, который часто используют в ходе решения дифференциальных уравнений. На чистовике можно сразу перейти от $\ln|y| = -2x + C^*$ к $y = Ce^{-2x}$, но всегда будьте готовы объяснить этот переход.

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. Такое вот симпатичное семейство экспоненциальных функций.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$. Это тоже просто.

В чём состоит задача? Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось условие $y(0) = 2$.

Оформить можно по-разному, но понятнее всего, пожалуй, будет так. В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$2 = Ce^{-2\cdot 0}$

$2 = Ce^{0}$

$2 = C \cdot 1$

То есть, $C = 2$

Стандартная версия оформления:

$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^{0} = C = 2$

Теперь в общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Ответ: частное решение: $y = 2e^{-2x}$

Выполним проверку. Проверка частного решение включает в себя два этапа:

Сначала необходимо проверить, а действительно ли найденное частное решение $y = 2e^{-2x}$ удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$? Вместо «икса» подставляем ноль и смотрим, что получится:

$y(0) = 2e^{-2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = 2$ – да, действительно получена двойка, значит, начальное условие выполняется.

Второй этап уже знаком. Берём полученное частное решение $y = 2e^{-2x}$ и находим производную:

$y' = (2e^{-2x})' = 2(e^{-2x})' = 2e^{-2x}\cdot(-2x)' = -4e^{-2x}$

Подставляем $y = 2e^{-2x}$ и $y' = -4e^{-2x}$ в исходное уравнение $y' = -2y$:

$-4e^{-2x} = -2\cdot 2e^{-2x}$

$-4e^{-2x} = -4e^{-2x}$ – получено верное равенство.

Вывод: частное решение найдено правильно.

Переходим к более содержательным примерам.

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные? Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

И перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

Если вы плохо изучили **неопределенные интегралы**, прорешали мало примеров, то деваться некуда – придется их осваивать сейчас.

Интеграл левой части легко найти **методом подведения функции под знак дифференциала**, с интегралом от котангенса расправляемся стандартным приемом.

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C^*|$$

В результате у нас получились одни логарифмы, и, согласно моей первой технической рекомендации, константу тоже определяем под логарифм.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них вполне можно (и нужно) избавиться. С помощью **известных свойств** максимально «упаковываем» логарифмы. Распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C^*|$$

$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C^*|$

$\ln\sqrt{|2y+1|} = \ln\left|\frac{C^*}{\sin x}\right|$

$\sqrt{|2y+1|} = \frac{C^*}{\sin x}$, и сразу-сразу приводим *общий интеграл* к виду $F(x;y) = C$, коль скоро, это возможно:
$\sqrt{|2y+1|}\cdot\sin x = C^*$

Здесь ещё уместно возвести обе части в квадрат и переобозначить константу:

Ответ: общий интеграл: $(2y+1)\cdot\sin^2 x = C,\ \text{где}\ \ C = const$

! Примечание: *общий интеграл часто можно записать не единственным способом. Таким образом, если ваш результат не совпал с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.*

Можно ли выразить «игрек»? Можно. Давайте выразим общее решение:
$$(2y+1)\cdot\sin^2 x = C \quad\Rightarrow\quad 2y+1 = \frac{C}{\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad 2y = \frac{C}{\sin^2 x} - 1 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}$$

Само собой, полученный результат годится для ответа, но обратите внимание, что общий интеграл смотрится компактнее, да и решение получилось короче.

Третий технический совет: *если для получения общего решения нужно выполнить значительное количество действий, то в большинстве случаев лучше воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла. Это же касается и «плохих» действий, когда требуется выразить обратную функцию, возвести в степень, извлечь корень и т.п.*

Как выполнить проверку? Проверку можно выполнить двумя способами. Способ первый: берём общее решение $y = \frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}$, находим производную $y' = \left(\frac{C}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\right)'$ и подставляем их в исходное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$. Попробуйте самостоятельно!

Второй способ состоит в дифференцировании общего интеграла. Это довольно легко, главное, уметь находить **производную от функции, заданной неявно**:
$((2y+1)\cdot\sin^2 x)' = (C)'$

$(2y+1)'\cdot\sin^2 x + (2y+1)\cdot(\sin^2 x)' = 0$

$(2y'+0)\cdot\sin^2 x + (2y+1)\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)' = 0$

$2y'\sin^2 x + (2y+1)\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 0$

делим каждое слагаемое на $2\sin x$:
$y'\sin x + (2y+1)\cdot\cos x = 0$

и на $\sin x$:

$$\frac{y'\sin x}{\sin x}+\frac{(2y+1)\cdot\cos x}{\sin x}=0$$

$$y'+(2y+1)ctgx=0$$

Получено в точности исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 3

Найти частное решение дифференциального уравнения $y\ln y+xy'=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=e$. Выполнить проверку.

Это пример для самостоятельного решения.

Напоминаю, что алгоритм состоит из двух этапов:
1) нахождение общего решения;
2) нахождение требуемого частного решения.

Проверка тоже проводится в два шага (см. образец в Примере № 2), нужно:
1) убедиться, что найденное частное решение удовлетворяет начальному условию;
2) проверить, что частное решение вообще удовлетворяет дифференциальному уравнению

Пример 4

Найти частное решение дифференциального уравнения $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\ln 2$. Выполнить проверку.

Решение: Сначала найдем общее решение. Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы dy и dx, а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy-2xdx=0$$

$$e^y\cdot e^{-x^2}dy=2xdx$$

$$e^ydy=\frac{2xdx}{e^{-x^2}}$$

$$e^ydy=2xe^{x^2}dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int e^ydy=2\int xe^{x^2}dx$$

Интеграл слева – табличный, интеграл справа – берем **методом подведения функции под знак дифференциала**:

$$\int e^ydy=\int e^{x^2}d(x^2)$$

$$e^y=e^{x^2}+C$$

Общий интеграл получен, нельзя ли удачно выразить общее решение? Можно. Навешиваем логарифмы на обе части. Поскольку они положительны, то знаки модуля излишни:

$\ln e^y = \ln(e^{x^2} + C)$

$y = \ln(e^{x^2} + C)$

(Надеюсь, всем понятно преобразование $\ln e^y = y \ln e = y \cdot 1 = y$, такие вещи надо бы уже знать)

Итак, общее решение:

$y = \ln(e^{x^2} + C)$, где $C = const$

Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию $y(0) = \ln 2$.
В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» логарифм двух:

$\ln 2 = \ln(e^0 + C)$

$\ln 2 = \ln(1 + C) \Rightarrow C = 1$

Более привычное оформление: $y(0) = \ln(e^0 + C) = \ln(1 + C) = \ln 2 \Rightarrow C = 1$

Подставляем найденное значение константы $C = 1$ в общее решение.

Ответ: частное решение: $y = \ln(e^{x^2} + 1)$

Проверка: Сначала проверим, выполнено ли начальное условие $y(0) = \ln 2$:
$y(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln(1 + 1) = \ln 2$ – всё гуд.

Теперь проверим, а удовлетворяет ли вообще найденное частное решение $y = \ln(e^{x^2} + 1)$ дифференциальному уравнению. Находим производную:

$$y' = (\ln(e^{x^2} + 1))' = \frac{1}{(e^{x^2} + 1)} \cdot (e^{x^2} + 1)' = \frac{1}{(e^{x^2} + 1)} \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)}$$

Смотрим на исходное уравнение: $e^{y-x^2} dy - 2xdx = 0$ – оно представлено в дифференциалах. Есть два способа проверки. Можно из найденной производной выразить дифференциал dy:

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2} + 1)} \Rightarrow dy = \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)}$$

Подставим найденное частное решение $y = \ln(e^{x^2} + 1)$ и полученный дифференциал $dy = \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)}$ в исходное уравнение $e^{y-x^2} dy - 2xdx = 0$:

$$e^{\ln(e^{x^2} + 1) - x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)} - 2xdx = 0$$

$$e^{\ln(e^{x^2} + 1)} \cdot e^{-x^2} \cdot \frac{2xe^{x^2} dx}{(e^{x^2} + 1)} - 2xdx = 0$$

Используем **основное логарифмическое тождество** $e^{\ln a} = a$:

$$(e^{x^2}+1)\cdot e^{-x^2}\cdot\frac{2xe^{x^2}dx}{(e^{x^2}+1)}-2xdx=0$$

$$2xe^{x^2-x^2}dx-2xdx=0$$

$$2xdx-2xdx=0$$

$$0=0$$

Получено верное равенство, значит, частное решение найдено правильно.

Второй способ проверки зеркален и более привычен: из уравнения $e^{y-x^2}dy-2xdx=0$ выразим производную, для этого разделим все штуки на dx:

$$\frac{e^{y-x^2}dy}{dx}-\frac{2xdx}{dx}=\frac{0}{dx}$$

$$e^{y-x^2}\cdot\frac{dy}{dx}-2x=0$$

$$e^{y-x^2}\cdot y'-2x=0$$

И в преобразованное ДУ подставим полученное частное решение $y=\ln(e^{x^2}+1)$ и найденную производную $y'=\frac{2xe^{x^2}}{(e^{x^2}+1)}$. В результате упрощений тоже должно получиться верное равенство.

<u>Пример 5 (решить самостоятельно)</u>

Найти общий интеграл уравнения $\sqrt{3+y^2}dx+\sqrt{1-x^2}ydy=0$, ответ представить в виде $F(x;y)=C$.

Какие трудности подстерегают при решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными?

1) Не всегда очевидно , что переменные можно разделить. Рассмотрим условный пример: $\sqrt{xy-2x}\cdot y'+xy^2+5y^2=0$. Здесь нужно провести вынесение множителей за скобки: $\sqrt{x(y-2)}\cdot y'+y^2(x+5)=0$ и отделить корни: $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y-2}\cdot y'+y^2(x+5)=0$. Как действовать дальше – понятно.

2) Сложности при самом интегрировании.

3) Преобразования с константой. Как все заметили, с константой в дифференциальных уравнениях можно обращаться достаточно вольно, и некоторые преобразования не всегда понятны новичку. Рассмотрим ещё один условный пример: $\frac{1}{2}\ln|1-x|=\frac{1}{2}\ln|y^2-3|+C^*$. В нём целесообразно умножить все слагаемые на 2: $\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+2C^*$. Полученная константа $2C^*$ – это тоже какая-то константа, которую можно обозначить через C^{**}: $\ln|1-x|=\ln|y^2-3|+C^{**}$.

Да, и поскольку у нас одни логарфимы, то константу C^{**} целесообразно переписать в виде другой константы: $\ln|1-x| = \ln|y^2-3| + \ln|C|$.

Или другой пример, предположим, что в ходе решения уравнения получен общий интеграл $-y^3 - y - x^2 - \ln x = C$. Такой ответ выглядит некрасиво, поэтому у каждого слагаемого целесообразно сменить знак: $y^3 + y + x^2 + \ln x = C$. Формально здесь опять ошибка – справа следовало бы записать $-C$. Но неформально подразумевается, что «минус цэ» – это всё равно константа, которая с тем же успехом принимает то же множество значений, и поэтому ставить «минус» не имеет смысла.

Я буду стараться избегать небрежного подхода, и всё-таки проставлять у констант разные индексы при их преобразовании. Чего и вам советую делать.

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение $2(xy+y)y' + x(y^4+1) = 0$. Выполнить проверку.

Решение: Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные:

$$2(x+1)y \cdot \frac{dy}{dx} = -x(y^4+1)$$

$$\frac{2ydy}{y^4+1} = -\frac{xdx}{x+1}$$

Интегрируем:

$$2\int \frac{ydy}{y^4+1} = -\int \frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int \frac{d(y^2)}{(y^2)^2+1} = -\int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$arctg(y^2) = -x + \ln|x+1| + C$$

Константу C тут не обязательно определять под логарифм, поскольку ничего путного из этого не получится.

Ответ: общий интеграл: $arctg(y^2) + x - \ln|x+1| = C$, где $C = const$

Проверка: Дифференцируем ответ (неявную функцию):

$$(arctg(y^2) + x - \ln|x+1|)' = (C)'$$

$$(arctg(y^2))' + (x)' - (\ln|x+1|)' = 0$$

$$\frac{1}{1+(y^2)^2}\cdot(y^2)' + 1 - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\frac{2yy'}{1+(y^2)^2} + \frac{x+1-1}{x+1} = 0$$

$$\frac{2yy'}{1+y^4} + \frac{x}{x+1} = 0$$

Избавляемся от дробей, для этого умножаем оба слагаемых на $(1+y^4)(x+1)$:

$$(1+y^4)(x+1)\cdot\frac{2yy'}{1+y^4} + (1+y^4)(x+1)\cdot\frac{x}{x+1} = 0$$

$$2(x+1)yy' + x(1+y^4) = 0$$

$$2(xy+y)y' + x(1+y^4) = 0$$

Получено исходное дифференциальное уравнение, значит, общий интеграл найден правильно.

Пример 7 (решить самостоятельно)

Найти частное решение ДУ.

$2y'\sin y\cdot\cos y\cdot\sin^2 x + \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Это пример для самостоятельного решения. Единственная подсказка – здесь получится общий интеграл, и, правильнее говоря, нужно исхитриться найти не частное решение, а *частный интеграл*.

Как уже отмечалось, в ду с разделяющимися переменными нередко вырисовываются не самые простые интегралы. И вот еще парочка таких примеров для самостоятельного решения.

Пример 8 (решить самостоятельно)

Решить дифференциальное уравнение $(1+e^x)ydy - e^y dx = 0$

Пример 9 (решить самостоятельно)

Решить дифференциальное уравнение $y - xy' = 3(1+x^2y')$